



## MATHÉMATIQUES

### OBJECTIF GENERAL

A l'issu de ce module, vous serez capable de résoudre les équations mathématiques.

LEÇON N°01 : LES SYSTÈMES DE NUMÉROTATION ET L'ALGÈBRE DE BOOLE

LEÇON N°02 : LA NOTION DE LA LOGIQUE BINAIRE ET LA TABLE DE VÉRITÉ

LEÇON N°03 : LES PORTES LOGIQUES ET CIRCUITS LOGIQUES

LEÇON N°04 : DES REPÈRES ET LES COORDONNÉES DANS SON PLAN

LEÇON N°05 : LA RÉOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

# LEÇON N°01 : LES SYSTÈMES DE NUMÉROTATION ET L'ALGÈBRE DE BOOLE

## OBJECTIF PÉDAGOGIQUE

À la fin de cette leçon, le stagiaire doit être capable d'étudier les systèmes de numérotation et l'algèbre de Boole et de résoudre les problèmes de calcul matériel.

## PLAN DE LA LEÇON :

### I- LES SYSTÈMES DE NUMÉROTATION

- 1- Base d'un système de numérotation
- 2- Les différents systèmes de numérotations

### II- CONVERSION D'UNE BASE X À LA BASE 10

#### – RÉSUMÉ

### III- CONVERSION ENTRE BASES

- 1- Conversion Décimal - Binaire
- 2- Conversion du décimal à une base X
- 3- Conversion Binaire - Octal -Hexadécimal et vice versa

### IV- OPÉRATEURS ARITHMÉTIQUES EN BINAIRE

- 1- Addition
- 2- Soustraction
- 3- Multiplication

### V- DIVISION

### VI- LA COMPLÉMENTATION

- 1- Complément à un
- 2- Complément à deux
- 3- Soustraction par complément à deux et addition

### EXERCICES D'APPLICATION

### CORRECTION DES EXERCICES

# I- LES SYSTÈMES DE NUMÉROTATION :

## 1- Base d'un système de numérotation :

Nous avons pris l'habitude de représenter les nombres en utilisant dix symboles différents: 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9

Ce système est appelé le système **décimal** (déci signifie dix).

Il existe cependant d'autres formes de numération qui fonctionnent en utilisant un nombre de symboles distincts.

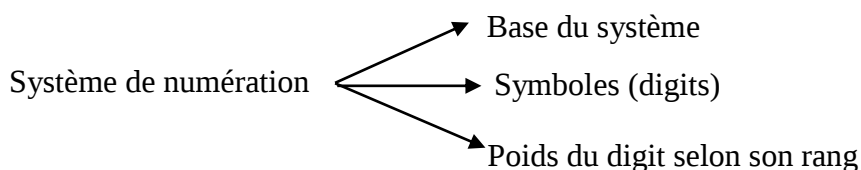
### Exemple :

Système binaire (bi: deux),  
Le système octal (oct: huit),  
Le système hexadécimal (hexa: seize).

En fait, on peut utiliser n'importe quel nombre de symboles différents (pas nécessairement des chiffres).

Dans un système de numération : le nombre de symboles distincts est appelé **la base** du système de numération

Pour compter des objets et les représenter par des nombres, on utilise des "systèmes de numération", en général "pondérés".

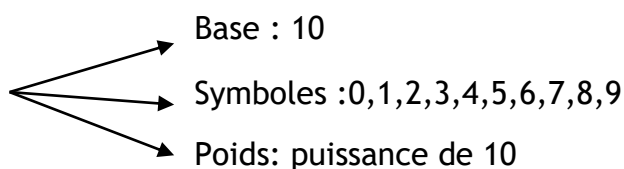


## 2- Les différents systèmes de numérotations :

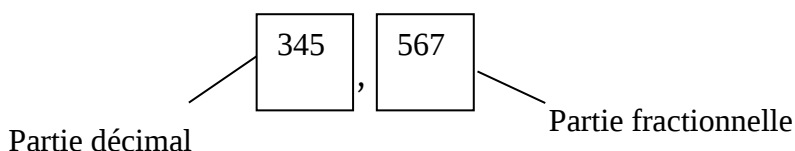
### 1.2- Système Décimal :

La base dix est très ancienne. Elle découle d'un choix naturel, dicté par le nombre des doigts des deux mains :

Pour le système de numérotation décimal on a :



3 4558 2



Développement en polynôme d'un nombre dans le système décimal

Soit le nombre 2011, ce nombre peut être écrit sous la forme suivante :

$$2011 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$2011 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 1$$

$$2011 = 2000 + 000 + 10 + 1$$

Cette forme s'appelle la forme polynomiale

Un nombre réel peut être écrit aussi sous la forme polynomiale

$$1978,265 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$$

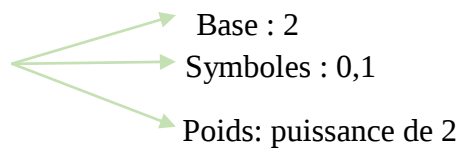
Comptage en décimal

- Sur une seule position : 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 9 =  $10^1 - 1$
- Sur deux positions : 00, 01, 02, ..., 99 =  $10^2 - 1$
- Sur trois positions 000, 001, ..., 999 =  $10^3 - 1$
- Sur n positions : minimum 0, ..., maximum  $10^n - 1$ , nombre de Combinaisons  $10^n$

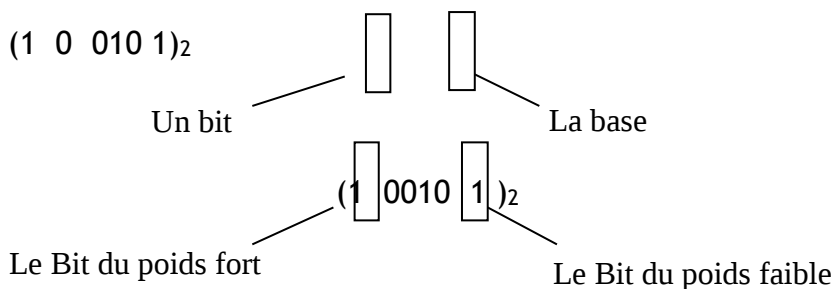
## 2.2- Système Binaire :

C'est le système utilisé par les ordinateurs pour faire des calculs et communiquer.

Pour le système de numération binaire on a :



Dans le système binaire, pour exprimer n'importe quelle valeur on utilise uniquement 2 symboles : {0, 1}



**Remarque :**

Un nombre binaire de 4 bit est appelé **quartet**.

**Exemple :** 1010

Un nombre binaire de 8 bit est appelé **octet**.

**Exemple :** 10011110

Un nombre dans la base 2 peut être écrit aussi sous la forme polynomiale.

$$(1110)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (14)_{10}$$

$$(1110,101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = (14,625)_{10}$$

Comptage en binaire :

Sur un seul bit : 0, 1

Sur deux bits

| Binaire | Décimal |
|---------|---------|
| 00      | 0       |
| 01      | 1       |
| 10      | 2       |
| 11      | 3       |

4

Combinaisons=  $2^2$

Sur trois bits

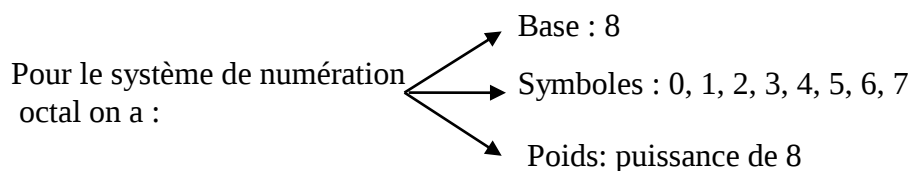
| Binaire | Décimal |
|---------|---------|
| 000     | 0       |
| 001     | 1       |
| 010     | 2       |
| 011     | 3       |
| 100     | 4       |
| 101     | 5       |
| 110     | 6       |
| 111     | 7       |

8

Combinaisons=  $2^3$

### 3.2- Système Octal :

Ce système permet d'abréger l'écriture des nombres binaires.



8 symboles sont utilisés dans ce système: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

**Exemple 1 :**

$$(127)_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = (87)_{10}$$

$$(127,65)_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} + 5 \cdot 8^{-2} = (87,828125)_{10}$$

**Exemple 2 :**

Le nombre  $(1289)_8$  n'existe pas dans la base 8 puisque les symboles 8 et 9 n'appartiennent pas à la base.

## 4.2- Système Hexadécimal :

Ce système permet d'abréger l'écriture des nombres binaires.

Pour le système de numération hexadécimal on a :

- Base : 16
- Symboles : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A ,B ,C,D,E,F
- Poids: puissance de 16

16 symboles sont utilisés dans ce système:{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9, A, B, C, D, E, F}

$$(17)_{16} = 1 * 16^1 + 7 * 16^0 = (23)_{10}$$

$$(AB)_{16} = A * 16^1 + B * 16^0 = 10 * 16^1 + 11 * 16^0 = (171)_{10}$$

| Hexadécimal | Décimal |
|-------------|---------|
| 0           | 0       |
| 1           | 1       |
| 2           | 2       |
| 3           | 3       |
| 4           | 4       |
| 5           | 5       |
| 6           | 6       |
| 7           | 7       |
| 8           | 8       |
| 9           | 9       |
| A           | 10      |
| B           | 11      |
| C           | 12      |
| D           | 13      |
| E           | 14      |
| F           | 15      |

## II- CONVERSION D'UNE BASE X À LA BASE 10 :

Cette conversion est assez simple puisque il suffit de faire le développement en polynôme de ce nombre dans la base X, et de faire la somme par la suite.

$$(1101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = (13)_{10}$$

$$(1A7)_{16} = 1*16^2 + A*16^1 + 7*16^0 = 1*16 + 10*16 + 7*16 = 256 + 160 + 7 = (423)_{10}$$

$$(1101,101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (13,625)_{10}$$

$$(43,2)_5 = 4*5^1 + 3*5^0 + 2*5^{-1} = 20 + 3 + 0,4 = (23,4)_{10}$$

### RESUME :

Dans une base X, on utilise X symboles distincts pour représenter les nombres.

La valeur de chaque symbole doit être strictement inférieure à la base X.

Chaque nombre dans une base X peut être écrit sous sa forme polynomiale.

### III- CONVERSION ENTRE BASES :

#### 1- Conversion Décimal - Binaire :

Pour passer du décimal vers une le binaire :

On divise le nombre à convertir par la base d'arrivée (2).

On répète les divisions tant que le quotient est supérieur ou égal à la base (2).

Le résultat est donné en lisant le dernier quotient et les restes de la dernière vers la première division.

**Exemple :**  $(0,6)_{10} = (?)_2$

$$\begin{array}{rcl} 0,6 * 2 & = & 1,2 \\ 0,2 * 2 & = & 0,4 \\ 0,4 * 2 & = & 0,8 \\ 0,8 * 2 & = & 1,6 \end{array} \longrightarrow (0,6)_{10} = (0,1001)_2$$

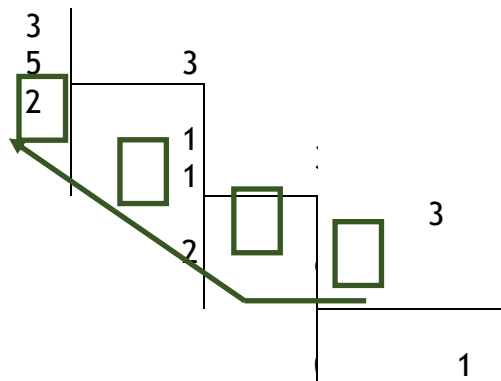
**REMARQUE :** Le nombre de bits après la virgule va déterminer la précision.

#### 2- Conversion du décimal à une base X :

La conversion se fait en prenant les restes des divisions successives sur la base X dans le sens inverse.

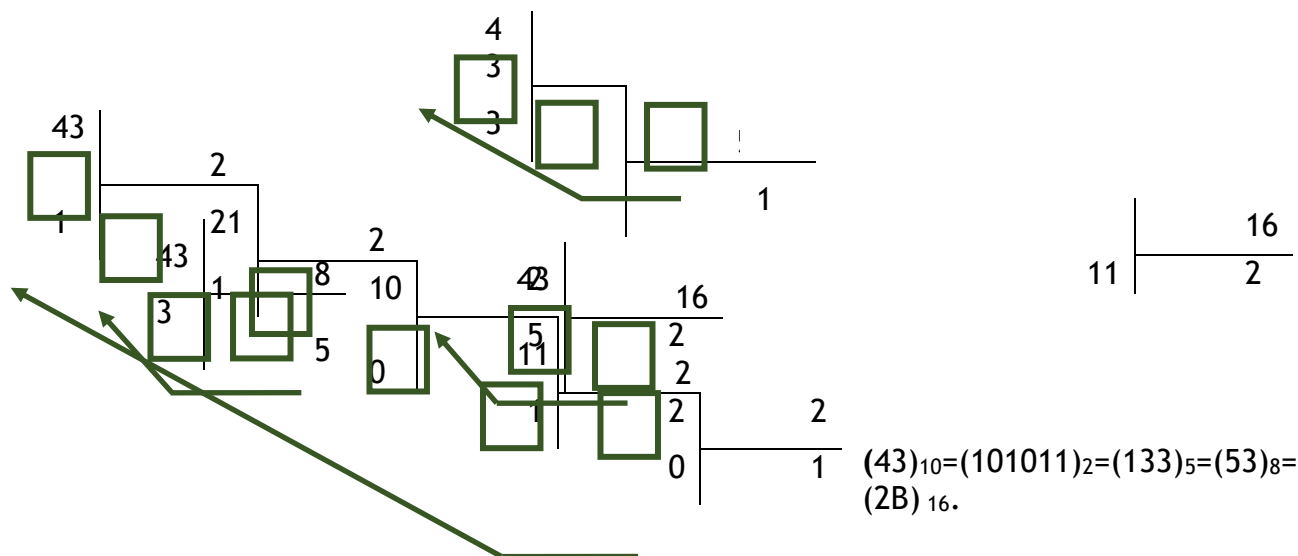
**Exemple1 :**  $(35)_{10} = (?)_3$ .

$$(35)_{10} = (1022)_3.$$



**QUESTION :** Effectuer les transformations suivantes :

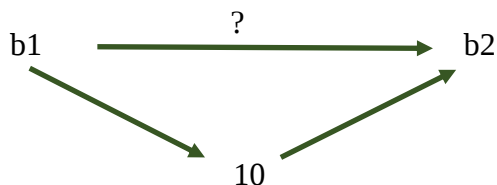
$$(43)_{10} = (?)_2 = (?)_5 = (?)_8 = (?)_{16}.$$



Conversion d'une base  $b_1$  à une base  $b_2$  :

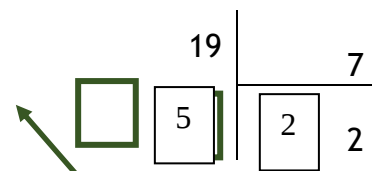
Il n'existe pas de méthode pour passer d'une base  $b_1$  à une autre base  $b_2$  directement.

L'idée est de convertir le nombre de la base  $b_1$  à la base 10, en suite convertir le résultat de la base 10 à la base  $b_2$ .



**Exemple1 :**  $(34)_5 = (?)_7$ .

$$(34)_5 = 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 15 + 4 = (19)_{10} = (25)_7$$



### 3- Conversion Binaire - Octal -Hexadécimal et vice versa :

Conversion Binaire - Octal

En octal chaque, symbole de la base s'écrit sur 3 bits en binaire.

L'idée de base est de replacer chaque symbole dans la base octal par sa valeur en binaire sur 3bits (faire des éclatements sur 3 bits).

| Octal | Binaire |
|-------|---------|
| 0     | 000     |
| 1     | 001     |
| 2     | 010     |
| 3     | 011     |
| 4     | 100     |
| 5     | 101     |
| 6     | 110     |
| 7     | 111     |

### Exemples :

$(345)_8 = (011\ 100\ 101)_2$   
 $(65,76)_8 = (110\ 101, 111\ 110)_2$   
 $(35,34)_8 = (011\ 101, 011\ 100)_2$

### Remarque :

Le remplacement se fait de droite à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle.

#### Conversion Octal - Binaire

L'idée de base est de faire des **regroupements** de **3 bits** à partir du poids faible.

Par la suite **remplacer** chaque regroupement par la valeur octal correspondante.

### Exemple :

$(11001010010110)_2 = (011\ 001\ 010\ 010\ 110)_2 = (31226)_8$   
 $(110010100,10101)_2 = (110\ 010\ 100, 101\ 010)_2 = (624,51)_8$

### Remarque :

Le regroupement se fait de droite à gauche pour la partie entière et de gauche à droite pour la partie fractionnelle.

#### Conversion Binaire - Hexadécimal

En hexadécimal chaque, symbole de la base s'écrit **sur 4 bits en binaire**.

L'idée de base est de replacer chaque symbole dans la base octal par sa valeur en binaire sur 4 bits (faire des éclatements sur 4 bits).

| Octal | Binaire |
|-------|---------|
| 0     | 0000    |
| 1     | 0001    |
| 2     | 0010    |
| 3     | 0011    |
| 4     | 0100    |
| 5     | 0101    |
| 6     | 0110    |
| 7     | 0111    |
| 8     | 1000    |
| 9     | 1001    |
| A     | 1010    |
| B     | 1011    |
| C     | 1100    |
| D     | 1101    |
| E     | 1110    |
| F     | 1111    |

### Exemples :

$(345B)_{16} = (0011\ 0100\ 0101\ 1011)_2$   
 $(AB3, 4F6)_{16} = (1010\ 1011\ 0011, 0100\ 1111\ 0110)_2$

#### Conversion Hexadécimal - Binaire

L'idée de base est de faire des **regroupements** de **4 bits** à partir du poids faible.

Par la suite **remplacer** chaque regroupement par la valeur hexadécimal correspondante.

### Exemple :

$$(11001010100110)_2 = (0011\ 0010\ 1010\ 0110)_2 = (32A6)_{16}$$

$$(110010100,10101)_2 = (0001\ 1001\ 0100,1010\ 1000)_2 = (194, A8)_{16}$$

## IV- OPÉRATEURS ARITHMÉTIQUES EN BINAIRE :

### 1- Addition :

L'addition binaire s'effectue de la même manière qu'une addition décimale, mais en se situant dans l'arithmétique des nombres binaires. Pour ce faire, on commencera par poser la table d'addition binaire :

#### Exemple 1 :

| A | B | A+ B | R |
|---|---|------|---|
| 0 | 0 | 0    | 0 |
| 0 | 1 | 1    | 0 |
| 1 | 0 | 1    | 0 |
| 1 | 1 | 0    | 1 |

$$(1010101010010011)_2 + (100010001101101)_2 = (?)_2$$

1 1 1 1 1

Retenues

$$\begin{array}{r} + \quad \quad \quad A \quad \quad \quad 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \quad \quad \quad B \quad \quad \quad 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Donc

$$(1010101010010011)_2 + (100010001101101)_2 = (1110111100000000)_2$$

#### Exemple2 :

$$(1010111010010011)_2 + (100110001101101)_2 = (?)_2$$

Retenues

$$\begin{array}{r} A \quad \quad \quad 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ B \quad + \quad \quad 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \text{Somme} \quad \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

$$1010111010010011_2 + 100110001101101_2 = 1111101100000000_2$$

## Exemple2 : $(10101110)_2 + (11111000)_2 = (?)_2$

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Retenues |   | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |   |
| A        |   | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| B        | + | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Somme    |   | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Donc  $(10101110)_2 + (11111000)_2 = (110100110)_2$

## 2- Soustraction :

La soustraction binaire s'effectue de la même manière qu'une soustraction décimale, on commencera par poser la table de soustraction binaire :

| A | B | A - B | E |
|---|---|-------|---|
| 0 | 0 | 0     | 0 |
| 0 | 1 | 1     | 1 |
| 1 | 0 | 1     | 0 |
| 1 | 1 | 0     | 0 |

## Exemple : $(110101101)_2 - (101100110)_2 = (?)_2$

|              |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A            |   | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| B            | - | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| Emprunt      |   |   | 1 |   |   |   | 1 | 1 |   |   |
| Soustraction |   | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Donc  $(110101101)_2 - (101100110)_2 = (1000111)_2$

## 3-Multiplication :

La multiplication binaire s'effectue de la même manière qu'une multiplication décimale, on commencera par poser la table de multiplication binaire :

| A | B | A x B |
|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0     |
| 0 | 1 | 0     |
| 1 | 0 | 0     |
| 1 | 1 | 1     |

**Exemple :**  $(1101)_2 \times (101)_2 = (?)_2$

|   |   |         |   |   |   |   |
|---|---|---------|---|---|---|---|
| A |   | 1       | 1 | 0 | 1 |   |
| B | x |         |   | 1 | 0 | 1 |
|   | = | 1 1 0 1 |   |   |   |   |
|   | + |         | 0 | 0 | 0 | 0 |
|   | + | 1       | 1 | 0 | 1 | . |
|   | = | 1       | 0 | 0 | 0 | 1 |

Donc  $(1101)_2 \times (101)_2 = (1000001)_2$

## V- DIVISION :

La division binaire est le reflet exact de la division décimale. On utilise une nouvelle fois les mêmes méthodes, et les mêmes propriétés s'appliquent.

**Exemple :**  $(10100101)_2 / (101)_2 = (?)_2$

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
|   |   | 1 | 0 | 1 | 1 |   |   | 1 | 1 | 1 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   | 1 | 0 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |   |
|   |   | 1 | 0 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |
|   |   | 1 | 0 | 1 | 1 |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |   |

Donc  $(10100101)_2 / (101)_2 = (1111)_2$

## VI- LA COMPLÉMENTATION :

Le **complément** permet de coder des nombres négatifs. En utilisant n bits, on peut alors représenter les nombres de  $-(2^{n-1} - 1)$  à  $+2^{n-1} - 1$ : le premier bit pour le signe (0 : positif, 1 : négatif) et n-1 bits pour le nombre.

**Exemple :** Sur 8 bits on peut représenter -127 à +127  
Sur 4 bits on peut représenter -7 à +7

Le complément existe sous deux formes : complément à un, et complément à deux.

## 1- Complément à un :

|        |       |       |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1      | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $-2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
| 128    | 64    | 32    | 0     | 8     | 0     | 0     | 0     |
| =      | -24   | +1=   | -23   |       |       |       |       |

Le complément à 1 d'un nombre binaire est trouvé en changeant tous les 1 à 0 et tous les 0 à 1

1 0 1 1 0 0 1 0  
 0 1 0 0 1 1 0 1

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

**Exemple :**

+5=(0101)<sub>2</sub> sur 4 bits → -5=(1010)<sub>2</sub> sur 4 bits  
 +8=(001010)<sub>2</sub> sur 6 bits → -8=(110101)<sub>2</sub> sur 6 bits  
 +15=(00001111)<sub>2</sub> sur 8 bits → -15=(11110000)<sub>2</sub> sur 8 bits

## ÉVALUATION :

- Pour Les nombres positifs sont évalués en évaluant la magnitude comme représentation binaire du nombre.
- Pour les nombres négatifs : On affecte une valeur négative au poids du signe de bit, Et On somme les poids dont la valeur du bit est à 1 Et on ajoute un 1

**Exemple :** 11101000)<sub>2</sub>=( ?)<sub>10</sub> sur 8 bits

## 2- Complément à deux :

Cette méthode est la seule utilisable mathématiquement, Elle permet une utilisation des nombres signés avec une représentation unique du zéro et la possibilité d'effectuer des calculs.

Le complément à deux est trouvé en ajoutant un 1 au bit le moins significatif (LSF) du complément à 1

- Complément à 2 = (Complément à 1) + 1

10110010 → 01001101+1  
 → 01001110

**Exemple :**

+5=(0101)<sub>2</sub> sur 4 bits → -5=(1011)<sub>2</sub> sur 4 bits  
 +8=(001010)<sub>2</sub> sur 6 bits → -8=(110110)<sub>2</sub> sur 6 bits  
 +15=(00001111)<sub>2</sub> sur 8 bits → -15=(11110001)<sub>2</sub> sur 8 bits

## ÉVALUATION :

- Les nombres positifs et négatifs sont évalués en faisant la somme des poids correspondant à des bits valant 1
- Attention : On affecte une valeur négative au poids du signe de bit pour un nombre négatif

**Exemple 1 :**  $(01010110)_2 = (?)_{10}$  sur 8 bits

|        |       |       |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0      | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| $-2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
| 0      | 64    | 0     | 16    | 0     | 4     | 2     | 0     |
| =      | +86   |       |       |       |       |       |       |

**Exemple 2 :**  $(10101010)_2 = (?)_{10}$  sur 8 bits

|        |       |       |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1      | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| $-2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
| -128   | 0     | 32    | 0     | 8     | 0     | 2     | 0     |
| =      | -86   |       |       |       |       |       |       |

## 3- Soustraction par complément à deux et addition :

### - Addition :

Quatre cas sont possibles :

**Les deux nombres sont positifs :** Dans ce cas-là on effectue une addition binaire classique.

**Exemple :**  $(00100011)_2 + (00100111)_2 = (?)_2$  sur 8 bits

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Retenues |   | 1 |   |   | 1 | 1 | 1 |   |
| A        |   | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| B        | + | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Somme    |   | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$$(00100011)_2 + (00100111)_2 = (01001010)_2$$

**Le nombre positif est plus 'grand' que le nombre négatif :** On effectue une addition de binaire classique, On 'oublie' la dernière retenue (à gauche), La somme est positive.

**Exemple :**  $(01100011)_2 + (11010100)_2 = (?)_2$  sur 8 bits

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Retenues |   |   |   |   |   |   |   |   |
| A        |   | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| B        | + | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Somme    |   | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

$$(01100011)_2 + (11010100)_2 = (00110111)_2$$

**b- Le nombre négatif est plus 'grand' que le nombre positif :** On effectue une addition binaire classique, La somme est négative et représentée directement dans le système complément à 2.

**c- Exemple :**  $(00100011)_2 + (11010100)_2 = (?)_2$  sur 8 bits

|          |   |  |   |   |   |   |   |   |     |
|----------|---|--|---|---|---|---|---|---|-----|
| Retenues |   |  |   |   |   |   |   |   |     |
| A        |   |  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 1 |
| B        | + |  | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 0 |
| Somme    |   |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 1 |

$$(00100011)_2 + (11010100)_2 = (11110111)_2$$

**d- Les deux nombres sont négatifs :** On effectue une addition binaire classique, On oublie la dernière retenue la plus à gauche, Et le résultat est négatif et déjà représenté dans le système complément à 2

**Exemple :**  $(10100011)_2 + (11110100)_2 = (?)_2$  sur 8 bits

|          |   |  |   |   |   |   |   |   |     |
|----------|---|--|---|---|---|---|---|---|-----|
| Retenues |   |  |   |   |   |   |   |   |     |
| A        |   |  | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 1 |
| B        | + |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 0 |
| Somme    |   |  | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 1 |

$$(10100011)_2 + (11110100)_2 = (10010111)_2$$

Dépassement de capacité (Overflow)

On parle d'**Overflow** quand il y a dépassement de la capacité pour représenter le résultat d'une somme

- Quand il y a **Overflow** la somme n'est pas de même signe que les opérandes
- Cela peut se produire uniquement si les deux opérandes sont de mêmes signes

**Exemple :**  $(01111101)_2 + (00111010)_2 = (?)_2$  sur 8 bits

|          |   |  |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|--|---|---|---|---|---|---|---|
| Retenues |   |  |   |   |   |   |   |   |   |
|          |   |  | 1 | 1 | 1 | 1 |   |   |   |
| A        |   |  | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| B        | + |  | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Somme    |   |  | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

$$(01111101)_2 + (00111010)_2 = (10110111)_2 \text{ sur 8 bits}$$

### - Soustraction :

La soustraction est considérée comme un cas particulier de l'addition :

$$A - B = A + (-B)$$

$$-A - B = (-A) + (-B)$$

On prend donc le système complément à deux pour représenter  $(-B)$ , Et on effectue une addition.

**Exemple :**  $(01100101)_2 - (00101011)_2 = (?)_2$  sur 8 bits  
 $(01100101)_2 - (00101011)_2 = (01100101)_2 +$   
 $(11010101)_2$

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Retenues |   |   |   |   |   | 1 | 1 |   |   |
| A        |   | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| B        | + | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Somme    |   | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$(01100101)_2 - (00101011)_2 = (00111010)_2$

## EXERCICES D'APPLICATION :

### EXERCICE N°01 :

Effectuer les transformations suivantes à la base 10 ?

$$\begin{aligned}(123)_6 &= (?)_{10} \\ (45,76)_8 &= (?)_{10} \\ (1100,11)_2 &= (?)_{10} \\ (1ABC)_{16} &= (?)_{10}\end{aligned}$$

### EXERCICE N°02 :

Effectuer les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}(23,65)_{10} &= (?)_2 \\ (18,190)_{10} &= (?)_2\end{aligned}$$

### EXERCICE N°03 :

Effectuer les transformations suivantes

$$\begin{aligned}(43)_6 &= (?)_5 = (?)_8 \\ (2A)_{16} &= (?)_9\end{aligned}$$

### EXERCICE N°04 :

Effectuer les opérations suivantes

$$\begin{aligned}(1111101)_2 + (1110101)_2 &= (?)_2 \\ (10001011)_2 + (1110101)_2 &= (?)_2 \\ (1111101)_2 - (1110101)_2 &= (?)_2 \\ (10001011)_2 - (1110101)_2 &= (?)_2 \\ (11001)_2 \times (10001)_2 &= (?)_2 \\ (100111)_2 \times (10101)_2 &= (?)_2 \\ (1110101)_2 / (1101)_2 &= (?)_2 \\ (1110001111101)_2 / (1101)_2 &= (?)_2\end{aligned}$$

### EXERCICE N°05 :

Effectuer les transformations en compléments à deux des nombres décimaux suivantes (sur 8 puis 10 bits).

$$13, -15, 122, 255, -100, 128$$

### EXERCICE N°06 :

Effectuer les opérations suivantes

$$\begin{array}{ll}(11001)_2 + (10001)_2 = (?)_2 & \text{sur 8 bits} \\ (100111)_2 - (10101)_2 = (?)_2 & \text{sur 6 bits} \\ (01101101)_2 + (11110101)_2 = (?)_2 & \text{sur 8 bits} \\ (11001011)_2 + (1000101)_2 = (?)_2 & \text{sur 10 bits} \\ (1111101)_2 - (1110101)_2 = (?)_2 & \text{sur 7 bits} \\ (10001011)_2 - (1110101)_2 = (?)_2 & \text{sur 8 bits}\end{array}$$

## CORRIGÉ DES EXERCICES :

### EXERCICE N°01 :

$$(123)_6 = 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 36 + 12 + 3 = (51)_{10}$$

$$(45,76)_8 = 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} + 2 \cdot 8^{-2} = 32 + 5 + 0,25 + 0,015625 = (37,265625)_{10}$$

$$(1100,11)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 8 + 4 + 0 + 0 + 0,5 + 0,25 = (12,75)_{10}$$

$$(1ABC)_{16} = 1 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 = 1 \cdot 4096 + 10 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 12 \cdot 1 = 4096 + 2560 + 176 + 12 = (6844)_{10}$$

### EXERCICE N°02 :

$$(23,65)_{10} = (10111,101001)_2$$

$$(18,190)_{10} = (10010,00110000101)_2$$

### EXERCICE N°03 :

$$(43)_6 = (27)_{10} = (102)_5 = (33)_8$$

$$(2A)_{16} = (42)_{10} = (46)_9$$

### EXERCICE N°04 :

$$(1111101)_2 + (1110101)_2 = (11110010)_2$$

$$(10001011)_2 + (1110101)_2 = (100000000)_2$$

$$(1111101)_2 - (1110101)_2 = (1000)_2$$

$$(10001011)_2 - (1110101)_2 = (10110)_2$$

$$(11001)_2 \times (10001)_2 = (110101001)_2$$

$$(100111)_2 \times (10101)_2 = (1100110011)_2$$

$$(1110101)_2 / (1101)_2 = (1001)_2$$

$$(1110001111101)_2 / (1101)_2 = (1000110001)_2$$

### EXERCICE N°5 :

|      | En 8 bits  | En 10 bits |
|------|------------|------------|
| 13   | 00001101   | 0000001101 |
| -15  | 11110001   | 1111110001 |
| 122  | 01111010   | 0001111010 |
| 255  | impossible | 0011111111 |
| -100 | 10011100   | 1110011100 |
| 128  | impossible | 0010000000 |

### EXERCICE N°6 :

Effectuer les opérations suivantes

$$(11001)_2 + (10001)_2 = (00101010)_2 \text{ sur 8 bits}$$

$$(100100)_2 - (10101)_2 = (001111)_2 \text{ Overflow sur 6 bits}$$

$$(01101101)_2 + (11110101)_2 = (01100010)_2 \text{ sur 8 bits}$$

$$(11001011)_2 + (1000101)_2 = (0100010000)_2 \text{ sur 10 bits}$$

$$(1111101)_2 - (1110101)_2 = (0001000)_2 \text{ sur 7 bits}$$

$$(10001011)_2 - (1110101)_2 = (10000000)_2 \text{ sur 8 bits}$$

## LEÇON N°02 : LA NOTION DE LA LOGIQUE BINAIRE ET LA TABLE DE VÉRITÉ

### OBJECTIF PÉDAGOGIQUE

À l'issue de cette leçon, vous serez capable d'étudier la notion de la logique binaire et la table de vérité.

### PLAN DE LA LEÇON:

#### I- CONJONCTION

#### II- DISJONCTION

#### III- NÉGATION

1- Négation d'une phrase

2- Négation d'une proposition

#### IV- PROPOSITION ET TABLE DE VÉRITÉ

1- Description proposition

2- Table de vérité

#### V-TAUTOLOGIE ET CONTRADICTION

#### VI- ÉQUIVALENCE LOGIQUE : ALGÈBRE DES PROPOSITIONS

#### VII- RAISONNEMENT ET IMPLICATION LOGIQUE

1- Raisonnements

2- Implication logique

## I- CONJONCTION :

L'assertion «  $P$  et  $Q$  » (aussi notée «  $P \wedge Q$  ») est vraie si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont toutes deux vraies :

| P    | Q    | $P \wedge Q$ |
|------|------|--------------|
| Faux | Faux | Faux         |
| Faux | Vrai | Faux         |
| Vrai | Faux | Faux         |
| Vrai | Vrai | Vrai         |

On appelle cette assertion la **conjonction** de  $P$  et de  $Q$

Formes normales conjonctives

$(p \text{ ou } !q) \text{ et } (q \text{ ou } !r), (p \text{ ou } !q) \text{ et } (q \text{ ou } !r) \text{ et } (r \text{ et } !p),$

## II- DISJONCTION :

Elle est définie de la manière suivante :  $a \text{ OU } b$  est VRAI si et seulement si  $a$  est VRAI ou  $b$  est VRAI. (En particulier, si  $a$  est vrai et que  $b$  est vrai aussi, alors  $a \text{ OU } b$  est vrai.) Cette loi est aussi notée.

- $+$
- « $\vee$ » (« $\vee$ ») en mathématiques (et en logique mathématique) ou en APL.
- « $|$ » ou « $||$ » dans certains langages de programmation
- En toute lettre «or» ou «OR» en logique ou dans certains langages de programmation.

On privilégiera dans la suite la notation  $+$  mais on prendra garde que cette loi n'est pas l'addition usuelle dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . C'est pourquoi, en mathématiques et en logique mathématique, la notation  $+$  n'est pas utilisée pour désigner le "ou inclusif" : elle est réservée au "ou exclusif", opération qui (jointe au "et") fait de toute algèbre de Boole un anneau de Boole, en particulier une  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -algèbre.

| Table de la loi OU |   |   |
|--------------------|---|---|
| $b \backslash a$   | 0 | 1 |
| 0                  | 0 | 1 |
| 1                  | 1 | 1 |

## III- NÉGATION :

### 1- Négation d'une phrase :

1- Proposition En mathématiques, une proposition est une phrase mathématique. Une proposition peut être vraie ou fausse.

Dans les phrases qui suivent, la lettre  $x$  représente un nombre réel.

|    | Négation de la proposition A                          | Vrai ou faux |
|----|-------------------------------------------------------|--------------|
| B1 | Il existe réel $x$ qui a un carré strictement négatif |              |
| B2 | $x > 5$                                               |              |
| B3 | Tous les rectangles sont des parallélogrammes         |              |

## 2- Négation d'une proposition :

Soit une phrase A

La phrase B est la négation de la phrase A lorsque:

Si A est vraie alors B est fausse et si A est fausse alors B est vraie.

La négation des phrases du I-1 sont:

On note non  $P$  ou  $\neg P$ , la négation de «  $P$  » :

| P    | Non $P$ ( $\neg P$ ) |
|------|----------------------|
| Vrai | Faux                 |
| Faux | Vrai                 |

## IV- PROPOSITION ET TABLE DE VÉRITÉ :

### 1- Description proposition :

Écrivez une proposition logique des trois variables  $p$ ,  $q$  et  $r$ .

Les variables sont ' $p$ ', ' $q$ ' et ' $r$ '.

Les symboles de constantes sont '1' ou 'V' pour Vrai, '0' ou 'F' pour Faux.

'!' est l'opérateur unaire de négation ( $!p$  est la négation de  $p$ , on peut aussi utiliser les signes -, /, \).

Les connecteurs 'ou' (disjonction, inclusive) 'et' (conjonction) peuvent être respectivement remplacés par '+' et par '.', '\*', 'X'.

Les autres connecteurs binaires sont ' $\Rightarrow$ ', ' $\Leftarrow$ ', ' $\Leftrightarrow$ '. Les parenthèses '(', ')' ou les crochets '[', ']' peuvent être utilisés dans l'écriture de la formule propositionnelle.

Exemples à 0 ou 1 variable :

F ou F, F ou V, V ou V, F et F, F et V, V et V,  
F  $\Rightarrow$  V, V  $\Rightarrow$  V, V  $\Rightarrow$  F, V  $\Leftrightarrow$  V, F  $\Leftrightarrow$  F, V  $\Leftarrow$  F,  
p ou F, p ou V, p et F, p et V, p ou p, p et p, p ou !p, p et !p,  
p  $\Rightarrow$  p, !p  $\Rightarrow$  p, p  $\Rightarrow$  !p, p  $\Leftrightarrow$  p, p  $\Leftrightarrow$  !p

Exemples à 2 variables :

Commutativité ou non  $q$  ou  $p$ ,  $q$  et  $p$ ,  $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ ,  $(q \Leftarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftarrow q)$ .

### 2- Table de vérité :

Une **table de vérité** est une manière sémantique de représenter le calcul propositionnel classique. Ces outils sont couramment utilisés en électronique (porte logique) et en informatique (tests).

- Cet outil de travail nous permettra d'identifier toutes les possibilités que les actionneurs peuvent exécuter, que soit une sortie active (1) ou non active (0).
- Dans la première les actionneurs sont identifiés par des variables. Une table de vérité se divise en deux c'est-à-dire, les variables d'entrées (Bouton poussoir, contact, etc..) et les variables de sorties (relais, moteurs, lumière, solénoïdes, etc...)
- Les variables d'entrées sont identifiées par des lettres de l'alphabet de A à W. Les variables de sorties sont identifiées par la terminologie « sortie » pour seulement une variable et par des lettres non utilisées par les variables d'entrées pour plus d'une sortie (ex: X, Y, Z).

| A     | B     | Sortie |
|-------|-------|--------|
| Etats | Etats | Etat   |

### ▪ Conception d'une table de vérité :

Pour concevoir une table de vérité il faut en premier lieu identifier le nombre de variable d'entrée. Cette information nous permettra de déterminer toutes les possibilités possibles que peuvent exécuter les variables entre elles.

Faut comprendre que les variables n'ont que deux possibilités 0 ou 1, active ou désactive, ont dit d'eux qu'ils sont binaire (seulement deux possibilités).

On peut donc affirmer que le nombre de possibilités d'une variable exposant le nombre de variable déterminera les nombres de combinaisons possibles.

Sachant le nombre de variable (2 exposant à la n), nous pourrons déterminer le nombre de division de la table de vérité.

### Exemple voir table précédente :

Variable A et B =  $2^2 = 4$  lignes et 2 colonnes, la troisième colonne servira à identifier la sortie.

Puis on identifiera chacun des casiers dans un ordre binaire. Exemple à la page suivante.

Premier case = 00  
 Second case = 01  
 Troisième case = 10  
 Quatrième case = 11

### Table de vérité, identification de la sortie :

| A | B | Sortie |
|---|---|--------|
| 0 | 0 | 0      |
| 0 | 1 | 0      |
| 0 | 1 | 0      |
| 1 | 0 | 1      |
| 1 | 1 | 0      |

La colonne Sortie sera indiqué par un nombre binaire 0 ou 1. Le nombre indiquer (0 ou 1) dans cette case dépendra de l'énoncé ou de la composante à laquelle les conditions des variables activeront oui ou non la sortie.

### Exemple:

La compagnie vous informe que le moteur (Sortie) devra s'activer uniquement si le bouton A est enfoncé et pas le bouton B. Ce qui signifie que la première ligne de la colonne sortie, on indiquera 0, la seconde un 0, la troisième 1 et la dernière 0.

### Table de vérité à plusieurs de sortie :

- Il est possible qu'il soit nécessaire d'avoir plusieurs sorties à partir d'une table de vérité.
- Un bon exemple serait l'utilisation de deux moteurs électrique à partir d'un même circuit électrique. Reprenons l'exemple précédent et ajoutons que le deuxième moteur s'activera uniquement si les boutons A et B sont enfoncés.

| A | B | Sortie X | Sortie Y |
|---|---|----------|----------|
| 0 | 0 | 0        | 0        |
| 0 | 1 | 0        | 0        |
| 1 | 0 | 1        | 0        |
| 1 | 0 | 1        | 0        |
| 1 | 1 | 0        | 1        |

#### ▪ Table de vérité, type de montage :

Les sorties sont variables en fonctions du type de montage.

**Exemple :**  $A + B = A \text{ ou } B$ , circuit en OU

À la première ligne binaire si  $A = 0$  et  $B = 0$ , la sortie sera  $= 0$

À la deuxième ligne binaire si  $A = 0$  et  $B = 1$ , la sortie sera  $= 1$

Etc.

| A | B | Sortie |
|---|---|--------|
| 0 | 0 | 0      |
| 0 | 1 | 1      |
| 1 | 0 | 1      |
| 1 | 1 | 1      |

**Exemple composé :**

| Table de vérité de a. (b+c) |   |   |          |
|-----------------------------|---|---|----------|
| a                           | b | c | a. (b+c) |
| 0                           | 0 | 0 | 0        |
| 0                           | 0 | 1 | 0        |
| 0                           | 1 | 0 | 0        |
| 0                           | 1 | 1 | 0        |
| 1                           | 0 | 0 | 0        |
| 1                           | 0 | 1 | 1        |
| 1                           | 1 | 0 | 1        |
| 1                           | 1 | 1 | 1        |

Le '.' se dit *et*, le '+' se lit *ou*.

On lit dans ce tableau : **a et (b ou c)**

Pour valider cette table, il faut donc que le **a** soit à l'état 1, ainsi que **b ou c**.

'et' et 'ou' sont les opérateurs d'un état logique. On note les entrées "E" et les sorties "S".

# V- TAUTOLOGIES ET DES CONTRADICTIONS<sup>1</sup>:

## 1- Définition

Une expression propositionnelle est une tautologie si et seulement si pour toutes les affectations possibles de valeurs de vérité à ses variables sa valeur de vérité est T.

Exemple :  $P \vee \neg P$

| $P \vee \neg P$ |   |   |
|-----------------|---|---|
| -----           |   |   |
| T               | F | T |
| F               | T | T |

Une expression propositionnelle est une contradiction si et seulement si pour toutes les affectations possibles de valeurs de vérité à ses variables sa valeur de vérité est F.

Exemple :  $P \wedge \neg P$

| $P \wedge \neg P$ |   |   |
|-------------------|---|---|
| -----             |   |   |
| T                 | F | F |
| F                 | T | F |

Utilisation de tautologies et les contradictions - à prouver la validité des arguments ; pour la réécriture des expressions utilisant uniquement les connecteurs de base.

## VI- ÉQUIVALENCE LOGIQUE : ALGÈBRE DE PROPOSITIONS :

On appelle équivalence de  $P$  et  $Q$  l'assertion, notée « $P \Leftrightarrow Q$ » qui n'est autre que  $(P \Rightarrow Q)$  et  $(Q \Rightarrow P)$

$(P \Leftrightarrow Q)$  est vraie si et seulement si  $P$  et  $Q$  ont même valeur de vérité. Dans ce cas on dit que  $P$  (resp :  $Q$ ) est une condition nécessaire et suffisante de  $Q$  (resp :  $P$ ) :

| P    | Q    | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|------|------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| Vrai | Vrai | Vrai              | Vrai              | Vrai                  |
| Vrai | Faux | Faux              | Vrai              | Faux                  |
| Faux | Vrai | Vrai              | Faux              | Faux                  |
| Faux | Faux | Vrai              | Vrai              | Vrai                  |

Quelques résultats usuels

Ici  $P$ ,  $Q$  et  $R$  désignent des assertions quelconques. Les résultats suivants sont valables :

- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
- $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
- $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

<sup>1</sup> Source : Lydia Sinapova, CMSC 175 mathématiques discrètes : Leçon 2 : Tautologies et contradictions. Equivalences logiques, sur site : [http://faculty.simpson.edu/lydia.sinapova/www/cmsc180/LN180\\_Johnsonbaugh-07/L02-CompSt.htm](http://faculty.simpson.edu/lydia.sinapova/www/cmsc180/LN180_Johnsonbaugh-07/L02-CompSt.htm)

## VII-RAISONNEMENT ET IMPLICATION LOGIQUE :

### 1- Raisonnements :

- **Raisonnement déductif :**

Bien sûr, si  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow R$  alors  $P \Rightarrow R$  (et il en va de même pour les équivalences). C'est la base du raisonnement déductif : partant de l'hypothèse, on arrive à la conclusion par une succession d'implications reliées les unes aux autres.

- **Raisonnement par équivalences :**

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation (ou un système d'équation), on veut trouver

Toutes les solutions et que des solutions. Le raisonnement déductif ne suffit pas : on raisonne par équivalence.

- **Raisonnement par l'absurde :**

Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions. Pour montrer  $P \Rightarrow Q$  on peut établir qu'il est impossible d'avoir à la fois  $P$  vraie et  $Q$  fausse

Dans la pratique pour démontrer un résultat par l'absurde, on suppose que l'hypothèse est vraie et que la conclusion est fausse. On montre alors que cette supposition est impossible en arrivant à une absurdité (par exemple  $0 = 1$ )

### 2- Implication logique :

En logique mathématique, l'implication est l'un des connecteurs binaires du langage du calcul des propositions, généralement représenté par le symbole «  $\Rightarrow$  » et se lisant « seulement si » ou, de façon équivalente, « si ..., alors ... » comme dans la phrase « s'il pleut, alors mon gazon est arrosé »<sup>1</sup>.

L'implication admet des interprétations différentes selon les différents systèmes logiques (logique classique, modale, intuitionniste etc...).

Étant un connecteur, qui produit une proposition à partir de deux autres, et qui est interprété par une opération sur les propositions ou sur les valeurs de vérités, l'implication n'est pas la déduction qui est une relation entre propositions a logique s'intéresse d'une part aux règles de construction des phrases mathématiques, d'autre part à leur vérité.

Soit  $X$  un ensemble. Un énoncé, ou une proposition, est une phrase mathématique dépendant des éléments de  $X$ . Un énoncé peut avoir deux valeurs, dépendant des éléments de  $X$ :vrai ou faux (**1 ou 0**). On associe à chaque énoncé  $P$  la partie de  $X$  des éléments tels que  $P$  est vrai.

## LEÇON N° 03 : LES PORTES LOGIQUES ET CIRCUITS LOGIQUES

### OBJECTIF PÉDAGOGIQUE

À la fin de cette leçon, le stagiaire doit être capable d'appliquer les portes logiques et circuits logiques.

### PLAN DE LA LEÇON :

#### INTRODUCTION

#### I- DUALITÉ, THÉORÈMES FONDAMENTAUX

#### II- ORDRE ET ALGÈBRE DE BOOLE

#### III- EXPRESSION BOOLÉENNE, FORME POLYGONALE

#### IV- PORTES LOGIQUES, CIRCUITS LOGIQUES

#### V- SIMPLIFICATION DES CIRCUITS LOGIQUES : DIAGRAMME DE KARNAUGH DIAGRAMME DE VENN

# INTRODUCTION :

Définit en 1847 par Georges Boole (1815-1864), physicien Anglais

- Algèbre applicable au raisonnement logique qui traite des fonctions à variables binaires (deux valeurs).
- Ne s'applique pas aux systèmes à plus de deux états d'équilibre.
- Permet d'étudier les circuits logiques (un système logique sert à modifier des signaux).

L'algèbre de Boole permet de manipuler des valeurs logiques

- Une valeur logique n'a que deux états possibles :
- Vraie(1) ou Fausse(0).
- Plusieurs valeurs logiques peuvent être combinées pour donner un résultat qui est lui aussi une valeur logique

**Exemple :**

- Arrêt marche
- Ouvert fermé
- Enclenché déclenché
- Avant arrière
- Vrai faux
- Conduction blocage

## I - DUALITÉ, THÉORÈMES FONDAMENTAUX :

### 1- Définition d'Algèbre de Boole :

Soit  $B$ , un ensemble ayant au moins 2 éléments notés 0 et 1. On munit  $B$  de 2 opérations binaires internes, notées « + » et « • », et d'une opération unaire notée  $x \rightarrow \bar{x}$  ( $B$ , +, •, bar) possède une structure d'Algèbre de BOOLE, si les opérations ont les propriétés suivantes :

- **Commutativité** :  $a + b = b + a$  et  $a \bullet b = b \bullet a$
- **Associativité** : « + » et « • » sont associatives, c'est à dire :

$$(\forall a \in B) (\forall b \in B) (\forall c \in B) (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

$$(\forall a \in B) (\forall b \in B) (\forall c \in B) (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) = a \bullet b \bullet c$$

Éléments neutres : 0 est le neutre pour + et 1 est le neutre pour •, c'est à dire :

$$(\forall a \in B) a + 0 = 0 + a = a \quad \text{et} \quad (\forall a \in B) a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$$

- **Distributivité** : Chaque opération est distributive par rapport à l'autre :

$$(\forall a \in B) (\forall b \in B) (\forall c \in B) a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

$$(\forall a \in B) (\forall b \in B) (\forall c \in B) a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$$

## 2- Le théorème de dualité :

En algèbre de BOOLE, tout théorème se présente sous 2 formes duales. L'énoncé du théorème dual s'obtient en permutant systématiquement dans l'énoncé du théorème initial, les « + » par les « • » et les neutres 0 par les 1.

### 2.1- Pratique du calcul BOOLEEN :

- Proposition :

1. Nous avons :  $1 = 0$  et  $0 = 1$
2. Nous avons de plus :  $a = a$
3. Principe d'idempotence :  $a + a = a$  et  $a \bullet a = a$
4. «1» est absorbant pour l'addition, et 0 pour la multiplication i.e.  
 $1 + a = 1$  et  $0 \bullet a = 0$

- Démonstration :

1. D'après l'axiome 5,  $0 + \bar{0} = 1$ , comme 0 est le neutre pour +, c'est fini; Et ce n'est pas plus difficile pour l'autre!!( principe de dualité)
2.  $\overline{\bar{0}} = 0$ , et  $a\bar{a} = 0$ , et  $\bar{a} + \bar{\bar{a}} = 1$ , et  $a + \bar{a} = 1$ ; de l'unicité du complémentaire on en déduit que  $\bar{\bar{a}} = a$
3. De  $a\bar{a} = 0$ , on tire  $a\bar{a} + a = a$  et,  $a\bar{a} + a = a + a\bar{a} = (a + a) \bullet (a + \bar{a}) = (a + a) \bullet 1 = a + a$ ; de la distributivité de + sur •, on trouve :

$$a\bar{a} + a = a + a\bar{a} = (a + a) \bullet (a + \bar{a}) = (a + a) \bullet 1 = a + a$$

D'où  $a + a = a$

4. L'égalité  $a \bullet a = a$  est la duale de la précédente.

### 2.2 -Démonstration de 1 est absorbante pour l'addition :

- Théorèmes fondamentaux :

$$1 + a = (a + \bar{a}) + a = (a + a) + \bar{a} = a + \bar{a} = 1$$

- Théorème d'absorption : Dans une somme de produits booléens, un terme absorbe ses multiples, c'est à dire :

$$a + ab = a$$

- Démonstration : C'est simple!  $a + ab = a \bullet 1 + ab = a (1 + b) = a (1) = a$

### 2.3- Théorème de redondance :

$$(\forall a \in B) (\forall b \in B) (\forall c \in B), \quad \bar{a}x + ay = \bar{a}x + ay + xy$$

- Démonstration :

$$\bar{a}x + ay = [\bar{a}x + (\bar{a}x) y] + [ay + (ay) x]$$

Car tout nombre absorbe ses multiples

$$= \bar{a}(xy) + a(xy) + \bar{a}x + ay$$

Associativité et commutativité des opérations, et réorganisation des calculs

$$= \bar{a}x + ay + xy(a + \bar{a}) = \bar{a}x + ay + xy$$

### 3- Théorème de MORGAN :

$$(\forall a \in B) (\forall b \in B) \overline{a + b} = \bar{a} \bullet \bar{b} \text{ et } \overline{a \bullet b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Les propositions sont "duales" l'une de l'autre Démonstration :

$$\bar{a} \bullet \bar{b} + (a + b) = \bar{a} \bullet \bar{b} + a \bullet 1 + b$$

En utilisant le principe de redondance 2.3, o`u nous pouvons écrire :

$$\bar{a}\bar{b} + a \bullet 1 = \bar{a}\bar{b} + a \bullet 1 + \bar{b} \bullet 1$$

dire que nous avons choisi dans 2.3  $x = \bar{b}$  et  $y = 1$  ; et nous avons donc :

$$\bar{a}\bar{b} + a \bullet 1 + b = \bar{a}\bar{b} + a \bullet 1 + \bar{b} \bullet 1 + b = \bar{a}\bar{b} + a + \bar{b} + b = \bar{a}\bar{b} + a + 1 = 1$$

$$\text{Donc, } \overline{a + b} = \bar{a} \bullet \bar{b}$$

## II- ORDRE ET ALGÈBRE DE BOOLE :

### 1- Algèbre de Boole comme structure ordonnée :

Une algèbre de Boole est un ensemble ordonné  $(E, \leq)$  :

- Il existe un plus petit élément, noté dans la suite 0 (il est souvent noté également  $\perp$ ), et un plus grand élément noté dans la suite 1 (il est souvent noté également  $\top$ ) ;

- Deux éléments  $a, b$  de  $E$  ont une borne supérieure, notée dans la suite  $a \vee b$ , et une borne inférieure notée dans la suite  $a \wedge b$  (c'est-à-dire que c'est un treillis) ;

- L'opération  $\wedge$  est distributive sur l'opération  $\vee$ , et l'opération  $\vee$  est distributive sur l'opération  $\wedge$ , c'est-à-dire que pour tous  $a, b$  et  $c$  de  $E$  :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) ;$$

- Pour tout élément  $a$  de  $E$ , il existe un élément  $a'$  de  $E$ , appelé *complément* de  $E$  et vérifiant :

$$a \wedge a' = 0 \text{ et } a \vee a' = 1.$$

Ainsi une algèbre de Boole est un treillis distributif, borné (avec plus petit et plus grand élément), et complémenté. Il suffirait de donner une des lois de distributivité, l'une entraînant l'autre dans un treillis (voir l'article lié).

On montre que chaque élément possède un unique complément. En effet si  $a^1$  et  $a'$  sont des compléments de  $a$ , en utilisant les propriétés des compléments, de l'ordre, et la distributivité on obtient :

$$a^1 = (a \wedge a') \vee a^1 = (a \vee a^1) \wedge (a' \vee a^1) = a' \vee a^1$$

C'est-à-dire qu' $a^1 \leq a'$ . De la même façon  $a^1 = a' \wedge a^1$ , donc  $a' \leq a^1$ , d'où l'égalité.

Par unicité du complément, l'application qui à  $a$  associe son complément est involutive ( $a'' = a$ ). Elle échange 0 et 1. Également par unicité du complément et par distributivité on montre que le passage au complément échange  $\wedge$  et  $\vee$ , ce sont les lois de De Morgan (voir paragraphe suivant).

On déduit des axiomes d'ordres que les opérations  $\wedge$  et  $\vee$  sont associatives, commutatives, que 0 est neutre pour  $\vee$  et absorbant pour  $\wedge$ , que 1 est neutre pour  $\wedge$  et absorbant pour  $\vee$ , et que ces opérations sont idempotentes.

### III- EXPRESSION BOOLÉENNE, FORME POLYGNONALE :

Une expression booléenne est une expression qui a pour valeur le type de données booléen. Les expressions **Booléen** peuvent revêtir plusieurs formes. La forme la plus simple est la comparaison directe de la valeur d'une variable **Booléen** à un littéral **Booléen**, comme le montre l'exemple suivant :

**Fonction booléenne de trois variables a, b, c :**

Écrivez une fonction des trois variables booléennes a, b et c.

Les variables sont 'a', 'b' et 'c'.  
 Les symboles de constantes sont '1' ou 'V' pour Vrai, '0' ou 'F' pour Faux.  
 '!' est l'opérateur unaire de complémentation (!a est le complément de a, on peut aussi utiliser les signes ?, -, /, \, N, n).  
 '+' '.' Sont les opérateurs binaires de la somme et du produit booléens, le signe '.' peut être omis ou remplacé par x, \*.  
 Les parenthèses '(', ')' ou les crochets '[', ']' peuvent être utilisés dans l'écriture de la fonction.

Expression booléenne :  $[(!a + !b + !c)(!b + c)] [(!a + !b + !c)(a!b + b!c + c!a)]$

| $((!a+!b+!c).(!b+c)).(!a+!b+!c).(a.!b+b.!c+c.!a))$ | b.c | b.!c | !b.!c | !b.c |
|----------------------------------------------------|-----|------|-------|------|
|                                                    |     |      |       |      |
| a                                                  | 0   | 0    | 1     | 1    |
| !a                                                 | 1   | 0    | 0     | 1    |

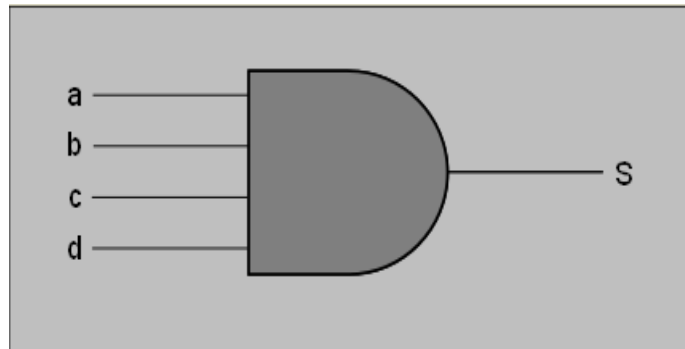
Forme normale disjonctive :  $!a !b c + !a b c + a !b !c + a !b c$   
 (somme de produits)

Écriture simplifiée :  $a !b + !a c + !b c$   
 (avec recouvrements éventuels)

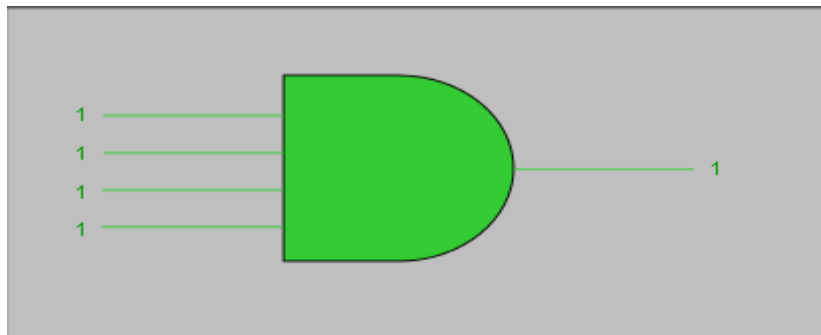
## IV- PORTES LOGIQUES, CIRCUIT LOGIQUE :Porte logique «ET» «AND» :

La sortie de la porte « ET » est à 1 si toutes les entrées sont à 1

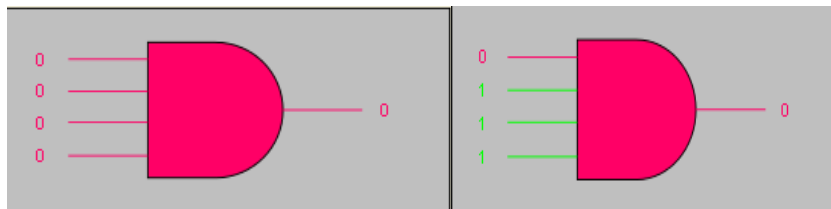
- Sortie ET a 1 si : a ET b ET c ET d sont à 1



- La sortie de la porte «ET» est à 1 si toutes les entrées sont à 1 . Il y a un seul cas



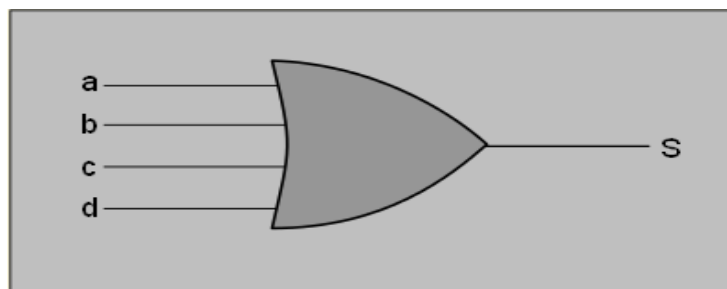
Dans les autres cas la sortie est à '0' :



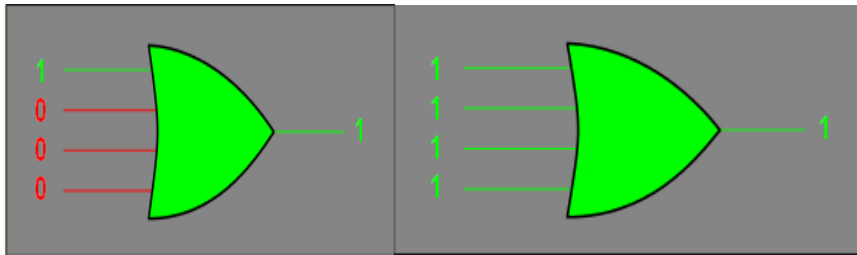
### Porte logique «OU»«OR» :

La sortie du circuit «OU» est à 1 si une entrée est à 1.

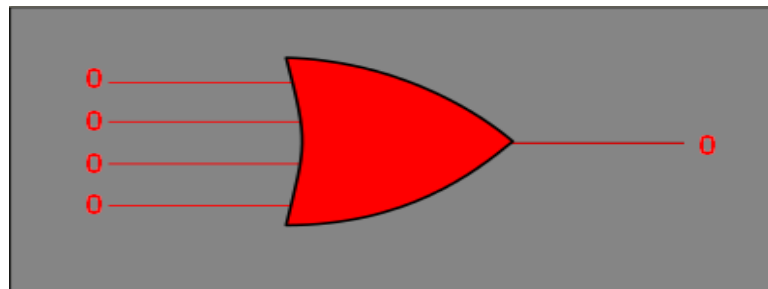
- sortie OU a 1 si : a OU b OU c OU d est à 1



Si une entrée est à 1, la sortie est à 1 :



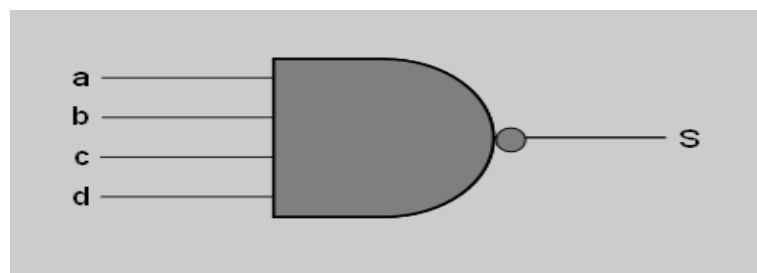
Si toutes les entrées sont à 0 alors la sortie est à 0. Il y a un seul cas :



**Porte logique «NON-ET»«NAND» :**

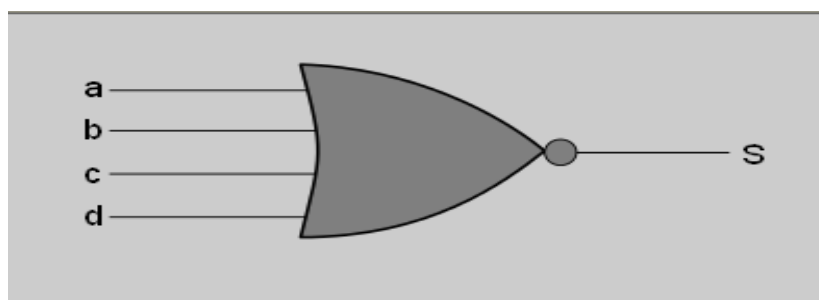
La sortie de la porte « NON-ET » est à 1 si une entrée est à 0.

- Sortie NON-ET a 1 si : a OU b OU c OU d est à 0



La sortie du circuit «NON-OU» est à 1 si toutes les entrées sont à 0.

- Sortie NON-OU a 1 si : a ET b ET c ET d sont à 0



## 1- Circuits logiques :

Circuits ayant un certain nombre d'entrées et de sorties, chacune d'entre elles ne pouvant prendre que 2 états.

## 2- Circuits logiques combinatoires :

Circuits ayant un certain nombre d'entrées et de sorties, chacune d'entre elles ne pouvant prendre que 2 états

## 3 -Circuits logiques combinatoires :

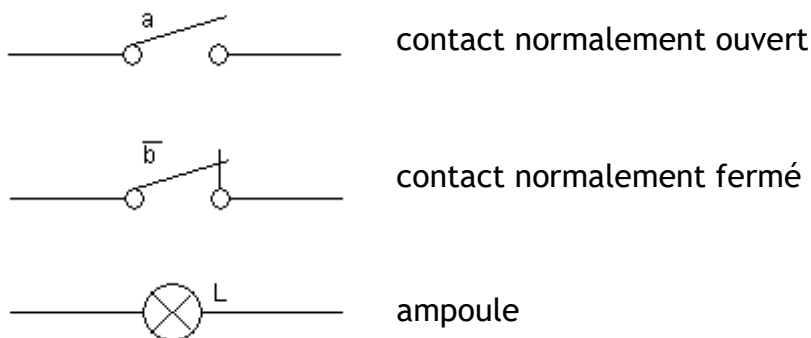
L'état de la sortie est une fonction déterminée de l'état des entrées :  $S = f(a, b, \dots)$

## 4-Circuits logiques séquentiels :

L'état seul des entrées ne suffit pas pour connaître l'état de la sortie car à un même état des entrées peuvent correspondre des états de sortie différents.

## 5-Schémas électriques :

Un des premiers types de circuit logique qui vient à l'esprit.  
Les symboles utilisés sont



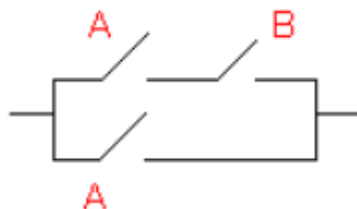
Les contacts sont toujours dessinés au repos.

Un contact ouvert au repos est représenté par une lettre minuscule.

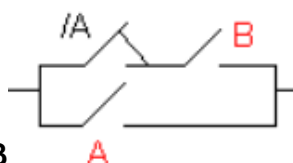
Un contact fermé au repos est représenté par une lettre minuscule surmontée d'une barre.

Les différents organes sont dits à l'état 0 lorsqu'ils sont au repos (non actionnés, non alimentés) et à l'état 1 lorsqu'ils fonctionnent.

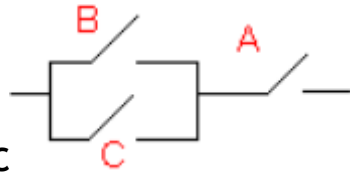
### EXEMPLES D'APPLICATIONS :



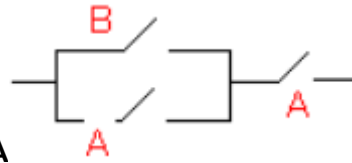
•  $A + AB = A$



•  $A + /AB = A + B$



•  $A(B + C) = AB + AC$



•  $A(A + B) = A + AB = A$

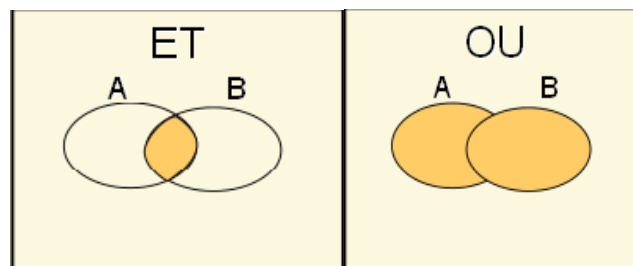
## V- SIMPLIFICATION DES CIRCUITS LOGIQUES : DIAGRAMME DE KARNAUGH :

### 1- Diagramme de Venn :

Représentation graphique d'une fonction logique :

ET: intersection

OU: réunion



### 2- Tableau de « KARNAUGH »:

Forme stylisée d'un diagramme de Venn

- Chaque case correspond à :
  - Une combinaison des valeurs des entrées
  - Donc à un minterme
  - Donc à une ligne de la table de vérité
- Dans chaque case on indique la valeur de la fonction :
  - 0
  - 1
  - ou  $\emptyset$  => état indifférent

**Explications :** L'application construit le tableau de Karnaugh de la fonction booléenne et l'écrit sous forme normale disjonctive de la fonction. En outre l'application donne une expression simplifiée de la fonction.

Le tableau est prévu pour trois variables a, b, c. Si l'une des variables ou plusieurs d'entre elles sont absentes de l'expression, le nombre de cases du tableau et leur position ne changent pas et les trois variables peuvent apparaître dans la forme normale disjonctive.

La forme normale disjonctive est soit 0 soit une expression des trois variables a, b, c. C'est une somme d'au plus huit produits de trois facteurs. Les trois facteurs sont a, b, c ou leurs compléments !a, !b et !c. (Par exemple, un terme pourrait être a!b!c).

|           | $b\ c$ | $b\ \bar{c}$ | $\bar{b}\ \bar{c}$ | $\bar{b}\ c$ |            |
|-----------|--------|--------------|--------------------|--------------|------------|
| $a$       | 0      | 0            | 1                  | 1            | $a\bar{b}$ |
| $\bar{a}$ | 1      | 0            | 0                  | 1            | $\bar{a}c$ |

$\bar{b}c$

Simplification de  $\bar{a}b + \bar{a}c + \bar{b}c$

À chacun des termes de la forme normale disjonctive correspond une case du tableau et, inversement, à chaque case du tableau correspond un produit. (Par exemple, a!b!c se trouve dans la case définie par 'a' à gauche et par b!c! au-dessus).

Lorsque la fonction est constante égale à 0 ou à 1, le programme l'indique, Sinon une écriture simplifiée utilisant les variables a, b ou c est donnée.

Dans certains cas l'expression peut encore se simplifier, voir l'exemple par défaut où  $a!\bar{b} + !a.c + !b.c$  peut s'écrire  $a!\bar{b} + !a.c$ . Lorsque le nombre de variables n'est pas élevé, le tableau de Karnaugh permet de simplifier assez simplement les expressions obtenues. L'image ci-contre montre comment simplifier  $a!\bar{b} + !a.c + !b.c$  en  $a!\bar{b} + !a.c$ .

|           | $b\ c$ | $b\ \bar{c}$ | $\bar{b}\ \bar{c}$ | $\bar{b}\ c$ |
|-----------|--------|--------------|--------------------|--------------|
| $a$       | 1      | 0            | 0                  | 1            |
| $\bar{a}$ | 1      | 0            | 0                  | 1            |

$$c = abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}$$

Les groupements considérés de plusieurs cases marquées '1' ont

-8 cases (toutes) : la fonction est égale à la constante '1'

-4 cases (consécutives\* ou en carré\*) : le terme correspondant aux 4 cases est formé d'une seule variable ou de son complément

-2 cases (accolées\*) : le terme est composé de deux variables (a !b par exemple).

-1 case : les termes sont composés de trois variables (ou de leurs compléments)

-0 case : la fonction est nulle.

\* : sur le schéma, les deux cases !ac (en rouge) sont considérées accolées, de même dans un autre exemple on considèrerait que les 4 cases  $c = abc + a!bc + !abc + !a!bc$  forment un carré.

|   |   | A |   |
|---|---|---|---|
|   |   | 0 | 1 |
| B | 0 |   |   |
|   | 1 |   |   |

**Remarques:** Lorsque l'expression proposée est mal construite, certaines erreurs sont détectées, une expression vide et un caractère incorrect seront signalés ainsi que certaines erreurs de parenthèses ou de positions des opérateurs.

Si le tableau ne s'affiche pas, c'est que l'expression entrée est incorrecte et que le type de l'erreur n'a pu être déterminé. Si vous voulez obtenir la forme normale conjonctive de  $f$ , cherchez la forme disjonctive de  $!f$  à l'aide de cette page et déduisez-en  $f = !(f)$  à la main. par exemple avec  $f = a.(b+c)+!a.!c$ , calculez  $!f = !(a.(b+c)+!a.!c) = !a c + a !b !c$  et déduisez de cette dernière expression  $f = (a+!c)(!a+b+c)$  et vérifiez le résultat.

Exemple pour simplifier la construction de Tableau de Karnaugh :

**1ère étape : construire le tableau** Si l'on a 2 variables  $a$  et  $b$  :

- $a$  est placé en colonne,
- $b$  sera placé en ligne,

Ce qui donne le tableau suivant :

De ce fait, on se retrouve avec 4 cases vides, correspondant aux 4 combinaisons possibles de 2 variables pouvant prendre 2 états.

Avec notre exemple, Voilà ce que donne le tableau rempli :

| F |   | a |   |
|---|---|---|---|
|   |   | 0 | 1 |
| b | 0 | 0 | 1 |
|   | 1 | 1 | 1 |

À partir du moment où le tableau est correctement rempli, on peut commencer à résoudre le système.

**2ème étape : Rassemblement**

Le but est très simple. Il faut effectuer des regroupements de 1 ou de X ; par paquets de 1, 2, 4, 8, 16.... $2^n$ . Ces regroupements doivent être des rectangles ou des carrés, jamais de travers, et les plus grands possible sachant qu'un élément déjà utilisé peut être repris. **Attention :** ne pas oublier que le tableau de Karnaugh est écrit sur un cylindre.

Avec notre exemple : on peut faire ces 2 rassemblements :

| F |   | a |   | F |   | a |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 0 | 1 |   |   | 0 | 1 |
| b | 0 | 0 | 1 | b | 0 | 0 | 1 |
|   | 1 | 1 | 1 |   | 1 | 1 | 1 |

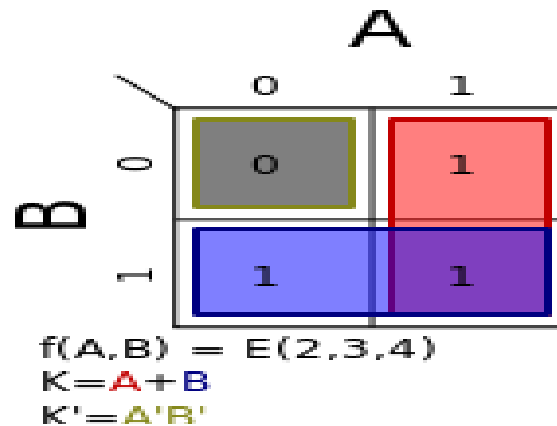
### 3ème étape : Résolution des rassemblements

Maintenant que l'on a pu, avec différentes sélections, prendre tous les 1, on essaie de résoudre les rassemblements. Pour cela, il faut que les variables participants au rassemblement concerné ne changent pas.

-Avec le rassemblement vert : La variable  $a$  est toujours à 1  
La solution verte donne :  $a$ .

-Avec le rassemblement rouge : La variable  $b$  est toujours à 1  
La solution rouge donne :  $b$ .

La solution finale du tableau est :  $F = a + b$



#### Exemples :

##### -Exemples à 0 ou 1 variable

$0 + 0, 0 + 1, 1 + 1, 0 \cdot 0, 0 \cdot 1, 1 \cdot 1,$

$a + 0, a + 1, a \cdot 0, a \cdot 1, a + a, a \cdot a, a + !a, a \cdot !a,$

Exemples à 2 variables

Commutativité  $b + a, b \cdot a,$

Compléments  $!(a + b), !(a \cdot b), a \cdot b + a \cdot !b,$

Absorption  $a + a \cdot b,$

##### -Exemples à 3 variables

Distributivités  $a(b + c), (a + b) \cdot (a + c),$

Produits de sommes  $(a + !b) \cdot (b + !c), (a + !b) \cdot (b + !c) \cdot (c + !a),$

$(a + b + c)(!a + b)(!b + c)(!c + a), (a + b + c) \cdot (!a + !b + !c),$

$(!a + b + c) \cdot (a + !b + c) \cdot (a + b + !c),$

**Exemples :** Donner la Négations de ces sommes dans le tableau de Karnaugh

$!(a!b + b!c + c!a), !(a!bc + ab!c + !abc), !(ab + bc + ac + a!b),$

## Tableau de Karnaugh

| $\neg(a.\neg b + b.\neg c + c.\neg a)$ | $b.c$ | $b.\neg c$ | $\neg b.\neg c$ | $\neg b.c$ |
|----------------------------------------|-------|------------|-----------------|------------|
|                                        |       |            |                 |            |
| <b>a</b>                               | 1     | 0          | 0               | 0          |
| <b><math>\neg a</math></b>             | 0     | 0          | 1               | 0          |

Forme normale disjonctive :  $\neg a \neg b \neg c + a b c$   
(somme de produits)

Écriture simplifiée :  $a b c + \neg a \neg b \neg c$   
(avec recouvrements éventuels)

$\neg(a \neg b c + a b \neg c + \neg a b c)$

## Tableau de Karnaugh

| $\neg(a.\neg b.c + a.b.\neg c + \neg a.b.c)$ | $b.c$ | $b.\neg c$ | $\neg b.\neg c$ | $\neg b.c$ |
|----------------------------------------------|-------|------------|-----------------|------------|
|                                              |       |            |                 |            |
| <b>a</b>                                     | 1     | 0          | 1               | 0          |
| <b><math>\neg a</math></b>                   | 0     | 1          | 1               | 1          |

Forme normale disjonctive :  $\neg a \neg b \neg c + \neg a \neg b c + \neg a b \neg c + a \neg b \neg c + a b$   
(somme de produits)  $c$

Écriture simplifiée :  $\neg a \neg c + \neg a \neg b + \neg b \neg c + a b c$   
(avec recouvrements éventuels)

$\neg(ab + bc + ac + a \neg b)$

## Tableau de Karnaugh

| $\neg(a.b + b.c + a.c + a.\neg b)$ | $b.c$ | $b.\neg c$ | $\neg b.\neg c$ | $\neg b.c$ |
|------------------------------------|-------|------------|-----------------|------------|
|                                    |       |            |                 |            |
| <b>a</b>                           | 0     | 0          | 0               | 0          |
| <b><math>\neg a</math></b>         | 0     | 1          | 1               | 1          |

Forme normale disjonctive :  $\neg a \neg b \neg c + \neg a \neg b c + \neg a b \neg c$   
(somme de produits)

Écriture simplifiée (avec recouvrements éventuels) :  $\neg a \neg c + \neg a \neg b$

## RÉFÉRENCE WEBOGRAPHIQUE :

[http://www.gilu.net/introduction\\_a\\_l\\_algebre\\_de\\_boole.htm](http://www.gilu.net/introduction_a_l_algebre_de_boole.htm)

<http://www.fsr.ac.ma/cours/informatique/mouline/AlgBoole.pdf>

<http://mathinfovannes.free.fr/articles.php?lng=fr&pg=130>

<http://www.reds.ch>

[http://fr.wikiversity.org/wiki/Logique\\_de\\_base](http://fr.wikiversity.org/wiki/Logique_de_base)

## LEÇON N°04 : DES REPÈRES ET LES COORDONNÉES DANS SON PLAN

### OBJECTIF PÉDAGOGIQUE

À l'issue de cette leçon, le stagiaire doit être capable de faire des repères et les coordonnées dans son plan.

### PLAN DE LA LEÇON :

#### INTRODUCTION

#### I- DÉFINITION

#### II- OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

- 1- Égalité de deux vecteurs
- 2- Somme de deux vecteurs
- 3- Différences deux vecteurs
- 4- Produit d'un vecteur par un réel

#### III- REPÉRAGE DANS UN PLAN

- 1- Longueur d'un vecteur
- 2- Direction d'un vecteur
- 3- Coordonnées d'un vecteur
- 4- Coordonnées d'un vecteur
- 5- Coordonnées d'un vecteur colinéaire

#### EXERCICE D'APPLICATION

#### CORRIGÉ DES EXERCICES

# LEÇON N°04 : DES REPÈRES ET LES COORDONNÉES DANS SON PLAN

## INTRODUCTION :

Un vecteur est une flèche - les vecteurs sont utiles en sciences physiques pour représenter une force, un déplacement, une vitesse. En Maths ils servent surtout à créer des repères pour repérer avec des coordonnées dans un plan ou dans l'espace.

### 1-Définition :

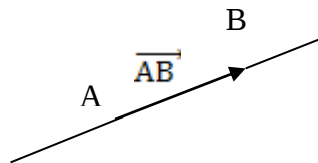
Un vecteur est constitué de trois données :

- Une longueur,
- Une direction (droite portant le vecteur),
- Un sens.

#### Exemple :

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  représente donc :

- AB ou  $\|\overrightarrow{AB}\|$  : La distance entre A et B
- (AB) : La direction représentée par la droite passant par A et B



On a : - A est l'origine du vecteur

- B est l'extrémité du vecteur

## II- OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS :

### 1- Egalité deux vecteurs :

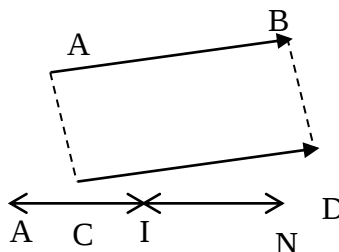
Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont égaux (et on écrit :  $\vec{u} = \vec{v}$ ) si et seulement si :

- Ils ont la même longueur :  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ .
- Ils ont la même direction : Les droites portants  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont parallèles.
- Ils ont le même sens : Le sens des deux vecteurs est identique.

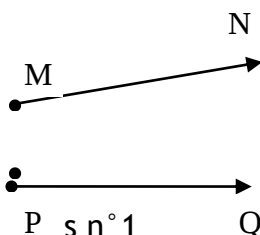
#### Conséquences :

1-  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  est équivalent à

2- I est le milieu du segment  $[AB]$  est équivalent à :

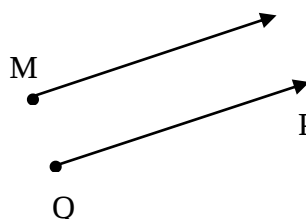


#### Exemple :



$\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  ne sont pas égaux

Cas n° 2 : Les deux vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  sont égaux



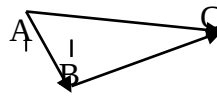
Cas n° 2 Cas n° 1 : Les deux vecteurs

## 2- Somme de deux vecteurs :

La somme de deux vecteurs qui sont placés l'un au bout de l'autre est le vecteur qui part de l'origine du premier et qui arrive à l'extrémité de l'autre

Si A, B et C sont 3 points on a toujours  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (c'est la relation de Chasles)

La somme des deux vecteurs rouges est le vecteur bleu



## 3- Différences de deux vecteurs :

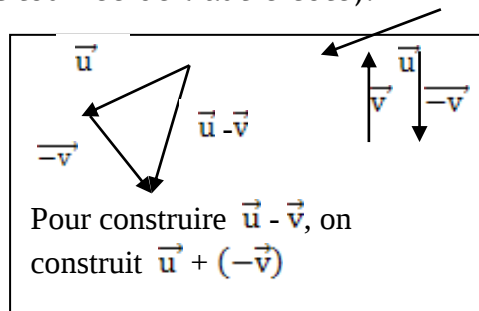
La différence de deux vecteurs c'est la somme du premier et de l'opposé du second.

L'opposé du vecteur  $\vec{u}$  c'est un vecteur de même longueur et de même direction que  $\vec{u}$  mais de sens opposé (la flèche est tournée de l'autre côté).

Si A et B sont deux points, on a toujours  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

**Exemple :**

$$\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE}$$



## 4- Produit d'un vecteur par un réel :

Le produit (ou le quotient) d'un vecteur  $\vec{u}$  par un nombre k est un vecteur de même direction que  $\vec{u}$ , de longueur multipliée par k, et de sens contraire à celui de  $\vec{u}$  si k est négatif.

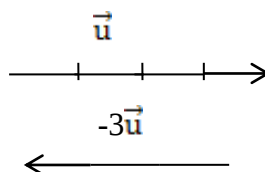
$$\text{On note : } \vec{v} = k \vec{u}$$

$\vec{u}$

**Exemples :**

$$4\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$$

$$-3\vec{u} = 3(-\vec{u})$$

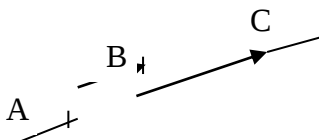


**Remarque :**

- 1- Si deux vecteurs ont la même direction, on dit qu'ils sont **colinéaires**
- 2- Il n'est pas possible d'additionner ou de soustraire des nombres avec des vecteurs
- 3- Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires alors :  $(AB) \parallel (CD)$



- 4- Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires alors les points A, B et C sont alignés



## REPÉRAGE DANS UN PLAN :

On note  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthogonal .

On note A  $(x_A, y_A)$  et B  $(x_B, y_B)$  deux points de ce repère.

### 1- Longueur d'un vecteur :

La longueur d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , donc AB, est donnée par la formule :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

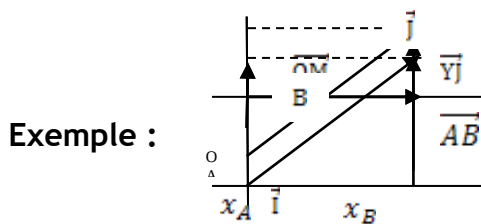
### 2- Direction d'un vecteur :

La direction du vecteur AB est la droite (AB) et son équation est :  $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x_B - x_A) + y_A$

### 3- Coordonnée d'un vecteur :

Si M  $(x, y)$  est un point du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  alors

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$$



- A  $(-1, 2) \implies \overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j}$
- B  $(2, 5) \implies \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$

### 4- Coordonnées d'un vecteur :

Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont données par la formule  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$  donc on aura =

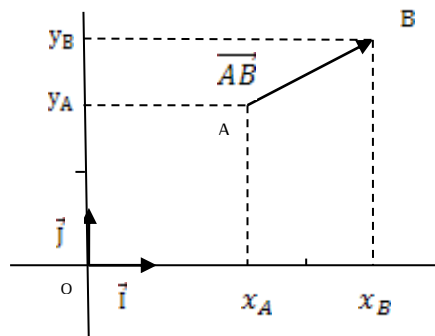
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$$

#### Exemple :

A  $(2, 3)$  et B  $(4, 4)$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2\vec{i} + 1\vec{j} \\ &= 2\vec{i} + \vec{j} \end{aligned}$$



#### Propriété :

Si deux vecteurs sont égaux alors ils ont les mêmes coordonnées.

## 5- Coordonnées et vecteurs colinéaires :

Si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors :  $\vec{u} = k \vec{v}$

$$\text{On a donc : } k = \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v} \quad \text{car} \quad \begin{cases} x_u = k x_v \\ y_u = k y_v \end{cases}$$

$$\implies x_u \times y_v = x_v \cdot y_u$$

$$\implies x_u \times y_v - x_v \cdot y_u = 0$$

Donc on peut dire que :

$\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  sont colinéaires alors :

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

**Exemple :** Les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont colinéaires

**Résultat :**

Si I est le milieu du segment [AB] alors ses coordonnées sont :

$$I \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

## IV-EXERCICES D'APPLICATION ET CORRIGÉS :

### EXERCICES N° 01 :

Les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 12 \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \end{pmatrix}$  sont colinéaires. Combien vaut y ?

**SOLUTION :**

On a :

$$12 \times 10 - y \cdot (-30) = 0 \implies 120 + 30y = 0$$
$$\implies Y = -\frac{120}{30} \implies \boxed{Y = -4}$$

### EXERCICES N° 02 :

Dans un repère, A (7, -3), B (-3,-14) et C (27,17) .Les points A, B et C sont-ils alignés ?

**SOLUTION :**

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 - 7 \\ -14 + 3 \end{pmatrix} \implies \vec{AB} \begin{pmatrix} -10 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 27 - 7 \\ 17 + 3 \end{pmatrix} \implies \vec{AC} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$(-10) \times 20 - (-11) \times 20 = -200 + 220 = 20 \neq 0$$

Alors A, B et C ne sont pas alignés

### EXERCICE N° 03 :

Dans un repère A (-3,5) et B (1,1). Le point C est aligné avec A et B. Il a pour abscisse 17  
Quelle est son ordonnée ?

#### SOLUTION :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1+3 \\ 1-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 17+3 \\ y_c+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 20 \\ y_c-5 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, alors :

$$4(y_c - 5) - (-4)(20) = 0 \iff 4y_c - 20 + 80 = 0$$

$$\iff 4y_c + 60 = 0$$

$$\iff y_c = -\frac{60}{4} \implies \boxed{y_c = -15} \quad \text{donc : C (17, -15)}$$

### EXERCICE N° 04 :

Dans un repère A (-37,-11) et B (-12,11). Quelle sont les coordonnées du point S symétrique de B par rapport à A?

#### SOLUTION :

A est le milieu du segment SB alors :  $\begin{array}{ccc} & S & A & B \\ & | & | & | \end{array}$

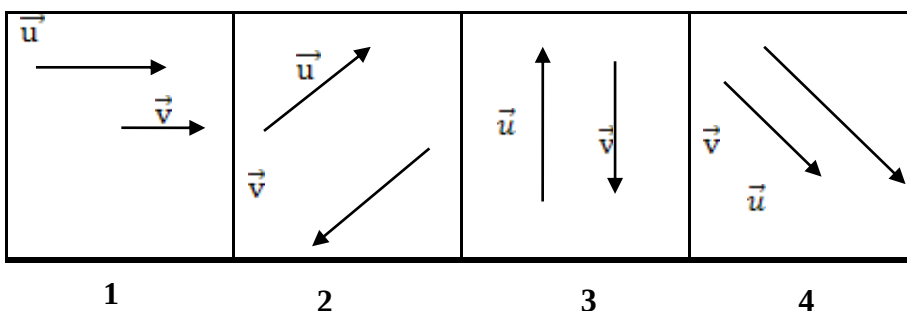
$$A \left( \frac{x_s + x_B}{2}, \frac{y_s + y_B}{2} \right)$$

$$\text{On a alors : } \begin{cases} \frac{x_s + x_B}{2} = -37 \\ \frac{y_s + y_B}{2} = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} x_s - 12 = -74 \\ y_s + 11 = -22 \end{cases}$$

$$\text{On trouve } \begin{cases} x_s = 62 \\ y_s = -33 \end{cases} \quad \text{al } \boxed{S(62, -33)}$$

### EXERCICE N° 05 :

Dans chaque cas, déterminer à partir du graphique une relation du type  $\vec{u} = k \vec{v}$  ou k est un réel :



## SOLUTION :

1-  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont la même direction, et sont de même sens donc  $k > 0$   $\vec{u} = \frac{6}{4} \vec{v}$  donc  $\vec{u} = \frac{3}{2} \vec{v}$

2-  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont la même direction, et sont de sens contraire donc

$$k < 0 \quad \vec{u} = -\frac{3}{4} \vec{v}$$

3- Ici :  $K < 0$  donc :  $\vec{u} = -\frac{7}{6} \vec{v}$

4- Ici :  $K > 0$  donc :  $\vec{u} = \frac{5}{8} \vec{v}$

## LEÇON N° 05 : LA RÉOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

### OBJECTIF PÉDAGOGIQUE

À la fin de cette leçon, le stagiaire doit être capable d'appliquer la résolution d'un système d'équations linéaires mathématiques.

### PLAN DE LA LEÇON :

#### INTRODUCTION

#### I- LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À UNE INCONNUE

#### II- LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À DEUX INCONNUES

#### III- SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

##### 1- Définitions

##### 2- Rang d'un système d'équations linéaires

##### 3- Système de Cramer

##### 4- Méthode de Gauss

#### RÉSUMÉ

## INTRODUCTION :

Le chercheur dans tous les domaines, se trouve souvent confronté à des problèmes dont la résolution passe par celle d'un système d'équations qui modélisent les divers éléments considérés.

On se rend facilement compte que la résolution d'un système d'équations linéaires est aisée. Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes de résolutions :

**a- Méthodes directes :** Qui conduisent à la solution en un nombre d'opérations connues comme :

- La méthode de CRAMER
- La méthode de GAUSS
- La méthode de JORDAN
- La méthode de CHOLEVSKY ...

**b- Méthodes itératives :** Qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaires étant difficile à prévoir et dépendant de la structure de la matrice associée au système (qu'on définira plus tard).

Il existe plusieurs méthodes itératives :

- La méthode de JACOBI
- La méthode de GAUSS-SEIDEL
- La méthode de la RELAXATION

Mais dans cette leçon, on va présenter seulement les méthodes directes suivantes :

- MÉTHODE DE CRAMER
- MÉTHODE DE GAUSS

# I- LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À UNE INCONNUE :

Dans tout ce chapitre, les équations considérées seront, sauf indication contraire, des équations à résoudre dans  $\mathbb{R}$

Soit l'équation linéaire suivante :

$$ax + b = 0$$

La solution de cette équation se fait comme suit :

$$\text{Si } a \neq 0 \Rightarrow ax = -b$$

$$\text{D'où } x = \frac{-b}{a}$$

$$\text{Si } a = 0 \begin{cases} b = 0 & (1) \\ b \neq 0 & (2) \end{cases}$$

- (1) : On a une infinité de solutions et x est totalement indéterminé  
(2) : On n'a pas de solutions c'est-à-dire l'équation est impossible.

**Exemple :**

Soit l'équation :

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{6}(2x - 1) = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} - \frac{x}{3} \right)$$

En multipliant les deux membres par 18 on obtient l'équation équivalente :

$$9x - 3(2x - 1) = 6\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } 9x - 6x + 3 &= 9 - 2x \\ 3x + 3 - 9 + 2x &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } x = \frac{6}{5}$$

## II- LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À DEUX INCONNUES :

### 1- Équation homogène : $ax + by = 0$

Cette équation n'est jamais impossible, sa résolution est résumée ci-dessous :

- a et b non nuls tous les deux :

$$\begin{cases} x = \lambda b \\ y = \lambda a \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- a = b = 0 on a une double infinité de solutions, x et y arbitraires tous les deux :

### 2- Équation affinée : $ax + by = c$

La résolution de cette équation se fait comme suit :

- **a et b non nuls tous les deux :**

Les solutions de l'équation sont infinies, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de solutions, l'une des solutions était arbitraire.

- **a = b = 0 :**

**C = 0 :** Double infinité de solutions, x et y étaient arbitraires tous les deux.

**C ≠ 0 :** L'équation est donc impossible.

**Remarque :**

Dans le cas où a et b non nuls, si **(x<sub>0</sub> , y<sub>0</sub>)** est une solution particulière (arbitraire) de l'équation, toutes les autres solutions seront données par les formules :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda b \\ y = y_0 - \lambda a \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**Exemple :**

Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation :

$$7x + 3y = 4$$

De l'équation donnée, on tire y en supposant x connue :

$$y = \left( \frac{7x-4}{3} \right) = \left( \frac{6x+3+x-1}{3} \right)$$

$$y = 2x - 1 + \left( \frac{x-1}{3} \right)$$

Mais x et y appartiennent à  $\mathbb{Z}$ , cela implique que :

X - 1 est un multiple de 3 c'est-à-dire :

$$X - 1 = 3K \quad K \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions recherchées sont donc données par les formules :

$$\begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 7k - 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

### III- SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES :

#### 1- Définition :

- On appelle système de « n » équations linéaires à « p » inconnues à coefficients dans un corps K, tout système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1p} * x_p = b_1 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \dots + a_{2p} * x_p = b_2 \\ \dots \dots \dots (1) \\ a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + \dots + a_{np} * x_p = b_n \end{cases}$$

- On appelle solution du système (1) tout élément  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in K^p$  qui vérifie le système (1).

- On appelle système homogène associé au système (1), le système déduit de (1) avec  $b_i = 0$  avec  $i = 1, n$ .
- On appelle matrice associée à (1) la matrice des coefficients des  $X_i$  :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \ddots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = [a_{ij}] = A \quad (2) \quad AX = B$$

## 2- Rang du système linéaire :

A la matrice A associée au système (1) correspond l'application linéaire :

$f: k^p \rightarrow k^n$  par rapport aux bases canonique de :

$$\{B\} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in k^n \quad \text{et} \quad \{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \in k^p$$

Alors le système (1) se met sous la forme fonctionnelle :

$$f(x) = b \quad \text{et sous la forme matricielle}$$

$$AX = B$$

Où  $\{X\}$  et  $\{B\}$  sont des matrices colonnes d'éléments  $X_i$  et  $B_j$

- On appelle « RANG » du système d'équations linéaire le rang de la matrice A associé à (1) :

$$r(1) = r[A] = r(f)$$

## RANG D'UNE MATRICE :

### a- Définition 1 :

La famille de vecteurs  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  de  $K^n$ , est une famille libre (linéairement indépendante) si toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille a ses coefficients nuls c'est-à-dire :

Pour  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

### Exemple :

Soient  $u_1(0,1,-1); u_2(-1,0,1); u_3(1,-1,0) \in \mathbb{R}^3$

Montrer que ces vecteurs sont deux à deux linéairement indépendants, il faut que ?

Pour que  $u_1$  et  $u_2$  soient linéairement indépendants, il faut que :

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$$

Où  $a_1$  et  $a_2 \in \mathbb{R}$  et  $a_1 = a_2 = 0$

$\Leftrightarrow$

$$a_1 (0,1,-1) + a_2 (-1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\text{D'où} \begin{cases} a_1 (0) + a_2 (-1) = 0 \\ a_1 (1) + a_2 (0) = 0 \\ a_1 (-1) + a_2 (1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$a_1 = a_2 = 0$$

$$\text{Ainsi : } a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

### b- Définition 2 :

On appelle rang d'une matrice A le rang des vecteurs colonnes de A. autrement dit, le rang de A est le nombre maximum de vecteurs colonnes de A linéairement indépendants.

On note :  $r [A]$  le rang de la matrice A.

### Exemple :

Trouver le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

On applique la définition du rang d'une matrice. Considérons les vecteurs colonnes :

$$\begin{cases} u_1 = (2,3,-1,0) \\ u_2 = (-3,1,0,2) \\ u_3 = (4,5,-1,4) \end{cases}$$

On va étudier leurs indépendances linéaires.

Soient  $a_1, a_2, a_3$  des éléments de  $\mathbb{R}$  tel que :

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2a_1 - 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 5a_3 = 0 \\ -a_1 - a_3 = 0 \\ 2a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases}$$

Il en résulte du système précédent que  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Ainsi, les trois vecteurs sont linéairement indépendants et le rang de la matrice A est égale à 3.

Soit " r " le rang du système linéaire (1), les cas possible sont :

a)  $p = n$  et  $\{r = p \text{ où } r < p\}$

b)  $p < n$  et  $\{r = p \text{ où } r < p\}$

c)  $p > n$  et  $\{r = n \text{ où } r < n\}$

### 3- Système de Cramer (p=n=r) :

Quand le système (1) admet une solution celle-ci est donnée par le théorème suivant :

#### THÉORÈME (1) :

Soit le système de "n" équations à "n" inconnues :

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1n} * x_n = b_1 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \dots + a_{2n} * x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots (I) \\ a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + \dots + a_{nn} * x_n = b_n \end{cases}$$

Soit : A la matrice associée au système

X la matrice colonne des  $x_i$

B celle des  $b_i$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) Le rang du système est égal à "n".
- b) Le système admet une solution unique pour tout  $b_i \in K$  égale à  $X = A^{-1} B$ .
- c) Le système homogène c'est-à-dire ( $B = 0$ ) n'admet que la solution  $X = 0$  dite solution triviale.
- d) Ma matrice A est inversible.

#### Définition :

Un système de "n" équations linéaires à "n" inconnues dans un corps K qui vérifie l'une des quatre (04) propriétés équivalentes du théorème (1) est appelé "SYSTEME DE CRAMER".

Pour calculer cette solution unique :

$$X = [A^{-1}] B$$

Qui se met aussi sous la forme  $x = f^{-1}(B)$ , on désigne les vecteurs colonnes de la matrice A par  $(u_i)_{i=1, n}$

Alors me système (I) s'écrit :

$$x_1(u_1) + x_2(u_2) + \dots + x_n(u_n) = B$$

Pour obtenir le coefficient  $x_1$ , on remplace dans le déterminant  $\det((u_1), (u_2), \dots, (u_n))$  le vecteur  $(u_i)$  par le vecteur B, on obtient :

$$\begin{aligned} \det((u_1), \dots, B, \dots, (u_n)) &= \det((u_1), \dots, x_1(u_1), \dots, x_n(u_n), \dots, (u_n)) \\ &= x_1 \det((u_1), \dots, (u_i), \dots, (u_n)) \\ &= x_i \det[A] \end{aligned}$$

On déduit les formules donnant la solution du système de CRAMER

$$X_1 = \frac{\det[A]}{\det[A]}; X_2 = \frac{\det[A_2]}{\det[A]}; \dots; X_i = \frac{\det[A_i]}{\det[A]}; \dots; X_n = \frac{\det[A_n]}{\det[A]}$$

Où  $a_i$  est la matrice déduite de la matrice AA en remplaçant la colonne "i" par la colonne B.

### Exemple :

Résoudre le système des 4 équations linéaires suivantes à 4 inconnues :

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -33 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -49 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 16 \\ 7x_1 + 5x_2 - 18x_3 + 6x_4 = 101 \end{cases} \dots (*)$$

La matrice associée au système (\*) est :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & -18 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -33 \\ -49 \\ 16 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Le calcul du déterminant donne :  $\det[A] = -2$

Donc A est inversible et le système est un système de CRAMER, il admet une solution unique

$$x_1 = \frac{\det[A_1]}{\det[A]}; x_2 = \frac{\det[A_2]}{\det[A]}; x_3 = \frac{\det[A_3]}{\det[A]}; \dots; x_4 = \frac{\det[A_4]}{\det[A]}$$

$$A = \begin{bmatrix} -33 & 3 & 5 & -2 \\ -49 & 4 & 8 & -3 \\ 19 & 3 & -4 & 1 \\ 101 & 5 & -18 & 6 \end{bmatrix}, \text{ d'où } \det[A_1] = -4$$

$$\Rightarrow x_1 = 2$$

De la même manière, on peut trouver le reste des solutions :

$$x_2 = -3, x_3 = -4, x_4 = 5$$

### Remarque :

Les cas où : a)  $n = p$  et  $r < n$

b)  $p < n$  et ( $r = n$  où  $r < p$ )

c)  $p > n$  et ( $r = n$  où  $r < n$ )

Le système (I) n'est pas de CRAMER, selon les cas il admet soit une infinité de solutions soit n'admet pas du tout de solutions.

## 4- Méthode de GAUSS :

Cette méthode est souvent utilisée, est constituée de deux étapes :

- La triangularisation,
- L'élimination.

### a- Triangularisation :

Cette étape consiste à transformer le système (I) qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$AX = B$$

En un système triangulaire :

$$[0 \dots] X = B' \quad (II) \quad (4-4-a)$$

#### b- Résolution du système triangulaire supérieur précédent :

Cette étape consiste à calculer les inconnues  $x_n$  de la dernière à la première par la résolution du système triangulaire (4-4-a). Cette méthode est dite : "Méthode d'élimination par la remontée" ou "Méthode d'élimination de GAUSS" ou en anglais "Back substitutions".

Remarque :

On notera :  $[0 \dots] = [S]$

#### •Triangularisation :

Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (III)$$

La triangularisation consiste à "éliminer" successivement les inconnues  $x_k$  ;  $k = 1, 2, \dots, n-1$  dans les équations  $k+1$  à  $n$ .

L'élimination de  $x_k$  se fait de la manière suivante :

- Exprimer  $x_k$  en fonction de  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  et  $b_k$  en utilisant l'équation "k".
- Reporter l'expression de  $x_k$  précédente dans les équations "k+2", "k+3", ..., "n".

Après élimination des inconnues  $x_1$  à  $x_{n-1}$  la matrice A est triangulaire supérieure puisqu'elle ne comporte plus que des zéros sous la diagonale.

L'élimination de chaque inconnue  $x_k$  modifie [A] et {B} ; notons  $[A^k]$  et  $\{B^k\}$  la matrice et le second membre après élimination des inconnues 1, 2, 3, ..., k. La matrice  $A^0$  étant la matrice initiale A.

$A = A^0$  et  $B = B^0$  est le système original.

Éliminer  $x_1$  dans les équations 2 à n  $A^1$  et  $B^1$

Éliminer  $x_2$  dans les équations 3 à n  $A^2$  et  $B^2$

.....

Éliminer  $x_k$  dans les équations k+1 à n

$A^k$  et  $B^k$

.....

Éliminer  $x_{n-1}$  dans les équations n

$S = A^{n-1}$  et  $B^{n-1} = B'$  \*\*\*\*\*système triangulaire supérieur.

• **Méthode d'élimination :**

Pour éliminer la variable  $x_1$  du système (III) nous utiliserons la première équation sous la forme suivante :

$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)$  et reportons cette expression de  $x_1$  dans les équations 2, 3, 4, ..., n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{12} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \vdots \\ b_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}b_1 \end{bmatrix}$$

Ce que nous noterons comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

Où

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \\ b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1 \end{cases} \quad i, j = 2, \dots, n$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{kj}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}b_k^{(k-1)} \end{cases} \quad i, j = k+1, \dots, n$$

Le système final s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2k}^{(1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_k^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \vdots & a^{(n-1)} \end{bmatrix} \{X_n\} = \{B^{(n-1)}\}$$

Soit

$$\begin{bmatrix} 0 & \vdots & \end{bmatrix} \{X_n\} = \{B'\} \quad (IV)$$

Avec :  $a_{11} = s_{11}, a_{12} = b_{12}, \dots$   
 $a_{22}^{(1)} = s_{22}, \dots, a_{2k}^{(1)} = b_{2k}$   
 $\dots$   
 $a_{nn}^{(n-1)} = s_{nn}$

La matrice S étât une matrice triangulaire supérieur

• **Résolution du système triangulaire supérieur :**

La résolution du système (IV) se fait à partir de la dernière équation, en calculant successivement  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$  d'où le nom de remonté ou back-substitution.

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{s_{nn}} \\ x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - s_{n-1,n} x_n}{s_{n-1,n-1}} \\ \vdots \\ x_1 = \frac{b_1 - s_{12} x_2 - s_{13} x_3 - \dots - s_{1n} x_n}{s_{11}} \end{cases}$$

**Exemple :**

Soit le système non symétrique suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 11 & 25 \\ 6 & 18 & 46 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 101 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système précédant par la méthode de GAUSS.

**Solution :**

1°) Triangularisation du système :

Après élimination de  $x_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 11 - \frac{4}{2} \cdot 4 & 25 - \frac{4}{2} \cdot 8 \\ 0 & 18 - \frac{6}{2} \cdot 4 & 46 - \frac{6}{2} \cdot 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 101 - \frac{4}{2} \cdot 34 \\ 180 - \frac{6}{2} \cdot 34 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 22 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 33 \\ 78 \end{pmatrix}$$

Après élimination de  $x_1$  et de  $x_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 22 - \frac{6}{3} \cdot 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 33 \\ 78 - \frac{6}{3} \cdot 33 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{aligned} [0 \ \cdot \ ] \{x_n\} &= \{B'\} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -34 \\ \qquad \qquad 3x_2 + 9x_3 = 33 \\ \qquad \qquad \qquad 4x_3 = 12 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{1}{3}(33 - 9x_3) = 2 \\ x_1 = \frac{1}{2}(34 - 4x_2 - 8x_3) = 1 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Remarque importantes :

- La méthode précédente ne fonctionne plus si en cours de la triangularisation le pivot " $a_{kk}$ " est nul. Il faut alors échanger la ligne "k" avec une autre ligne "i>k" telle que " $a_{ik} \neq 0$ ".
- Dans le cas d'un système symétrique, nous pouvons conserver la symétrie à condition d'échanger également les colonnes "i" et "k", ce qui implique une modification de l'ordre des inconnues. Pour que ceci soit possible il faut que le terme diagonal " $a_{ii}$ " soit non nul.
- Si lorsque " $a_{ii} = 0$ ", tous les termes " $a_{ik}$ " avec (i>k) ou tous les termes " $a_{ik}$ " avec (i>k) sont nuls, la matrice A est singulière ; Le système ne peut donc pas être résolu. Le déterminant de la matrice A est le produit des termes diagonaux de la matrice triangulaire S.

Trouver le pivot non nul dans la matrice symétrique suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \\ 8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^{\text{ère}} \text{ ligne} \\ 2^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ 3^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{matrix}$$

### Solution :

Le premier pivot " $a_{11}$ " étant nul, échangeons la 1<sup>ère</sup> ligne avec la 2<sup>ème</sup> ligne, on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \\ 8 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ 1^{\text{ère}} \text{ ligne} \\ 3^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{matrix}$$

Cette matrice n'est plus symétrique. Nous ne pouvons dans ce cas échanger les colonnes 1 et 2 car ceci redonnerait un pivot nul en première ligne.

Après élimination de  $x_1$  :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & -12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Après élimination de  $x_1$  et de  $x_2$  :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Le déterminant de [A] est :  $(4)(4)(-24) = -384$

## RÉSUMÉ :

Nous résumons la résolution d'une équation à une inconnue de la forme  $ax + b = 0$  par le tableau :

|     | ax+b=0 |                                |
|-----|--------|--------------------------------|
| a≠0 | b≠0    | x=b/a                          |
| a=0 | b=0    | Infinité de solutions          |
|     | b≠0    | Equation impossible à résoudre |

Et la résolution d'une équation à deux inconnues par le tableau :

|     | ax+by=c |     |                                                                                                                         |
|-----|---------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a≠0 | b≠0     | c=0 | $x=\lambda b \quad \lambda \in \mathbb{R}$<br>$y=-\lambda a$                                                            |
|     |         | c≠0 | $x=x_0 + \lambda b \quad \lambda \in \mathbb{R}$<br>$y=y_0 - \lambda a \quad (x_0, y_0) : \text{Solution particulière}$ |
|     |         | c=0 | Double infinité de solutions.                                                                                           |
| a=0 | b=0     | c≠0 | Equation impossible à résoudre.                                                                                         |

Dans cette leçon nous avons ensuite défini un système d'équation linéaires comme étant une suite s'équations linéaire. La représentation matricielle de ce dernier est  $AX = B$  ou A es la matrice du système et B et son second membre.

Enfin, on s'est intéressé aux méthodes de résolution directes et plus particulièrement à celle de CRAMER et celle de GAUSS. Nous les résumons par :

### 1) Méthode de CRAMER : $n=p=r \quad \det [A] \neq 0$

#### a- Système non homogène :

$$X_1 = \frac{\det[A_1]}{\det[A]}; X_2 = \frac{\det[A_2]}{\det[A]}; \dots; X_i = \frac{\det[A_i]}{\det[A]}; \dots; X_n = \frac{\det[A_n]}{\det[A]}$$

#### b- Système homogène :

La solution nulle est la solution triviale (elle est unique).

### 2) Méthode de GAUSS :

#### a- Triangularisation de A :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)} \end{cases} \quad i, j = k+1, \dots, n$$

b- Résolution du système triangulaire :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{s_{nn}} \\ x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - s_{n-1,n} x_n}{s_{n-1,n-1}} \\ \vdots \\ x_1 = \frac{b_1 - s_{12} x_2 - s_{13} x_3 - \dots - s_{1n} x_n}{s_{11}} \end{cases}$$

## EXERCICES D'APPLICATION :

### EXERCICE N°01 :

Résoudre le système suivant par la méthode de CRAMER (démontrer qu'il est de CRAMER)

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

### EXERCICE N°02 :

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de la matrice inverse :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

### EXERCICE N°03 :

Résoudre le système des 4 équations linéaires à 4 inconnues suivant par la méthode de CRAMER :

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -33 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -49 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 16 \\ 7x_1 + 5x_2 - 18x_3 + 6x_4 = 101 \end{cases}$$

Résoudre le système suivant par la méthode de GAUSS :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

## CORRECTION DES EXERCICES D'APPLICATION :

### EXERCICE N°01 :

Calcul du rang du système :

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases} \quad (1)$$

La matrice A associée au système (1) est :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs colonnes de la matrice A sont :

$$u_1 = (2, 3, 5)$$

$$u_2 = (1, -2, -3)$$

$$u_3 = (-3, 2, -1)$$

On va étudier leur indépendance linéaire :

Soient  $a_1, a_2, a_3$  de  $\mathbb{R}$  telle que :

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 - 3a_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3a_1 - 2a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 5a_1 - 3a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow 5a_1 - 3a_2 = a_3$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 - 3(5a_1 - 3a_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 - 2a_2 + 2(5a_1 - 3a_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_1 - 3a_2 = a_3 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} -13a_1 + 10a_2 = 0 \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} 13a_1 - 8a_2 = 0 \end{cases} \quad (2')$$

$$\begin{cases} 5a_1 - 3a_2 = a_3 \end{cases}$$

$$(1') + (2') \Leftrightarrow -13a_1 + 10a_2 + 13a_1 - 8a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

D'où les (03) vecteurs colonnes sont linéairement indépendant donc le rang du système est "3"

### La résolution du système :

Le nombre d'équation est égale au nombre d'inconnues et c'est aussi égale au rang du système donc le système est de CRAMER :

Le calcul du déterminant :  $\det [A] = 26$  ; non nul.

Le système donné est de CRAMER donc il possède une solution unique donnée par les formules suivantes :

$$x = \frac{\det[A_1]}{\det[A]}; y = \frac{\det[A_2]}{\det[A]}; z = \frac{\det[A_3]}{\det[A]}$$

$$x = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

$$y = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$z = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{bmatrix} = -3$$

La solution unique  $(x, y, z) = (1, -3, -2)$ .

### EXERCICE N°02 :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

La matrice associée au système est  $[A]$  :

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

L'inverse de  $[A]$  est  $[A^{-1}]$

$$[A^{-1}] = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$x = [A^{-1}]\{B\}$$

$$x = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solution est :

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

### EXERCICE N°03 :

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -33 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = -49 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 16 \\ 7x_1 + 5x_2 - 18x_3 + 6x_4 = 101 \end{cases}$$

La matrice associée au système est :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

Le calcul du déterminant donne :  $\det [A] = -2$

Donc A est inversible et le système est de CRAMER ; il admet une solution unique :

$$x_1 = \frac{-1}{2} \det \begin{bmatrix} -33 & 3 & 5 & -2 \\ -49 & 4 & 8 & -3 \\ 16 & 3 & -4 & 1 \\ 101 & 5 & -18 & 6 \end{bmatrix} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1}{2} \det \begin{bmatrix} 3 & -33 & 5 & -2 \\ 5 & -49 & 8 & -3 \\ 2 & 16 & -4 & 1 \\ 7 & 101 & -18 & 6 \end{bmatrix} = -3$$

$$x_3 = \frac{-1}{2} \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & -33 & -2 \\ 5 & 4 & -49 & -3 \\ 2 & 3 & 16 & 1 \\ 7 & 5 & 101 & 6 \end{bmatrix} = -4$$

$$x_4 = \frac{-1}{2} \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & -33 \\ 5 & 4 & 8 & -49 \\ 2 & 3 & -4 & 16 \\ 7 & 5 & -18 & 101 \end{bmatrix} = 5$$

Solution est :  $\{x\} = \{2, -3, -4, 5\}$ .

### EXERCICE N°04 :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases} \quad [A] \{X\} = \{B\}$$

a) Triangularisation :

Après élimination de  $x_1$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 - \frac{2}{1}3 & 0 - \frac{2}{1}3 \\ 0 & 2 - \frac{3}{1}3 & 6 - \frac{3}{1}3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - \frac{2}{1}0 \\ 11 - \frac{2}{1}0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Après élimination de  $x_1$  et de  $x_2$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 - \frac{-7}{-4} 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 - \frac{-7}{-4} 2 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

La solution du système triangulaire résultant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_2 - 6x_3 = 2 \\ \frac{15}{2}x_3 = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Par la méthode de GAUSS, on trouve la solution :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{15}{2} / \frac{15}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1}{4}(2 + 6x_3) = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_1 = -3x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- 1- [ZIT.86] ALGÈBRE «COURS DE 1<sup>ÈRE</sup> ANNÉE DES UNIVERSITÉS »
  - a. ZITOUNI Mohamed
  - b. Editions O.P.U 1986
- 2- [BAB.83] ALGÈBRE I MUDULE SEM 300
  - a. BABA-HAMED C.
  - b. BENHABIB K.
  - c. Éditions O.P.U 1983
- 3- [BOU.93] MÉTHODES NUMÉRIQUES APPLIQUÉES
  - a. (Avec nombreux problèmes résolus en fortran 77)
  - b. M.BOUMAH RAT
  - c. A.GOURDIN
  - d. Éditions O.P.U 1993
- 4- [COM.81] ALGÈBRE (EXERCICE VUIBERT)  
A.COMBES et D.BARGUES 1981
- 5- [BEN.75] INTRODUCTION À L'ALGÈBRE LINÉAIRE
  - a. Benali BENZAGHOU
  - b. Éditions S N E D 1975
- 6- [DHA.84] PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
  - a. Gouri DHATT
  - b. Gilbert TOUZOT 1984